重訪理性文明之啟蒙與奠基

項武義

目次

第四章：重訪理性文明之奠基：幾何、天文與物理兩千年

§4.1 太陽、地球與月亮；測地與量天

§4.2 行星之謎與古天文學

§4.3 文藝復興與新天文學

§4.4 數理分析：天上人間，合而為一，牛頓萬有引力定律

概要

理性文明(the civilization of rational minds)乃是全人類自古到今,世代相承,對於生存於其中的大自然(亦稱之為宇宙 universe)的本質,實事求是,精益求精,理性探索的認知之總體與精華。科技昌盛的現代文明,實乃理性文明之延續與發展。作為有幸繼承理性文明的現代人,有此福份自當要下「知福」的功夫,尤其是現代的大學(university),其通識教育中理所當然地應該有認知理性文明的的課程與讀物,使得大學生得見理性文明之梗概與精神;並且啟發有智而且有志之士,以理性文明的承先啟後,繼往開來為己任。其實,也唯有做好上述通識課程,這個大學的名稱(university)才是名符其實是一個認知宇宙之理的學府。

理性文明源遠流長,如今回顧,至少可以追溯到古希臘文明的紀元前七、六世紀,例如先賢 Thales、Pythagoras 等的工作和所思所見,可以說實乃理性文明的啟蒙階段(參見第一章§1.2 和第二章)其中畢氏總結了古埃及與巴比倫文明的成就與思想,所創導的哲理性信念(philosophical belief),即

> 「宇宙是具有精簡和諧的內在本質與原理的;而且可以經由數、比值和形的研究,由表及裡去認知其理」

他的高瞻遠矚,兩千多年來一直啟發、鼓舞著世世代代的先賢志士,投身於理性文明的長河,承先啟後,繼往開來,樂在其中。再者,上述「數、比值和形的研究」其實就是數理分析與幾何學,而畢氏學派(Pythagorean School)也就身體力行,致力於定量幾何基礎論之研究(參見第三章)。

綜觀紀元前七世紀到紀元十七世紀,大概可以說從 Pythagoras 到 Newton,兩千多年,理性文明發展的主題在於幾何(Geometry)、天文(Astronomy)與物理(Physics),由啟蒙到奠基,其中光芒萬丈的里程碑與偉大成就首推 Eudoxus 的幾何基礎論,Kepler 的新天文學和牛頓的《自然哲學的數學原理》。在上述兩講將對於這兩千年理性文明的演變歷程做一次簡樸精到、平實近人的重訪,希望也能做到引人入勝,身歷其境。

第一章 集合與邏輯，思想的代數

作為一個有教養的現代人，其言談論述應該合乎邏輯。遠在古希臘時代，邏輯(logic)業已是當年知識分子的通識課程；在古印度文明則稱之為因明之學。可惜在中國古文明之中，此事不彰亦未見強調；例如在諸子百家的好些著述立論中，稍加細讀就會發現不合邏輯的雄辯相當不少；往往舉一些風馬牛不相干的例子就下其強詞奪理的理論。如今回顧反思，古希臘的邏輯學繁瑣難明，其教學效果不佳，以至於古今中外，芸芸眾生，言談論述合乎邏輯者，依然居於少數，這實在是現在普及教育中的一大缺憾，甚至於在大學通識教育中，簡樸易懂的邏輯教學，依然不可多得，此事著實令人費解，其實自從 George Boole(1815~1864)對於邏輯精到的創見之後，要把邏輯解說得平實近人、易懂好用，業已是水到渠成、順理成章之事，這就是本章要討論的課題。

§1.1 集合與邏輯，波爾代數

§1.1.1 集合概念與基本語句

集合(sets)這個概念乃是日常用語中極為原始簡樸的基本用語，例如一個背包中所裝的東西，一棵樹上所結的果子，你班上的同學，某校所有師生，平面上和定點 O 的距離小於(或等於、大於)R 之點所成的集合…等等都是集合的實例，現在讓我們把這個簡樸常用的集合概念，加以明確規範與定義，即集合的定義與符號體系：

(i)一個集合 A 由其所包含的元素(elements)所唯一確定。

(ii)通常以$a \in A$表述 a 是 A 中的一個元素(a is an element of A)。

(iii)若所有 A 中的元素也都是 B 中的元素，則稱 A 是 B 的一個子集(subset)，將以符號$A \subseteq B$表達之。

(iv)由此可見，兩個集合 A、B 若有$A \subseteq B$和$B \subseteq A$，則 A=B，亦即兩個所包含的元素完全相同，則視為相同之集合。

例如：某一器具或機器的所有零件所成的集合，在他們拆開的狀態和妥加組裝的狀態，用集合的觀點來看，乃是同一個集合。總之，集合的概念十分單純明確，那就是所含有的元素所集成者。

注意：不含有任何元素的集合將想成集合的一個特例，稱之為空集合(empty set)，將以符號$\emptyset$表示空集，採用這個符號的用意是強調：空集並不是零！再者，空集理當看做任何集合的子集，亦即$\emptyset \subseteq A$ 恆成立。

＊1.1.2 集合描述法

對於比較簡單的集合，最為原始的描述法就是列舉其所含有的元素的逐一列舉法，例如四則運算所組成之集合可以用{加、減、乘、除}或{+、－、×、÷}描述之，或者各別編號列舉法，例如某某圖書館的藏書所成的集合則通常先把每本書各別編以書號，然後存檔描述之；所有正整數所組成的集合通常可以用十進位紀數法描述之，當然也可以用二進位紀數法描述之。其實在研討事物之本質中，我們常見常用的集合往往是由某種給定性質為其特徵性質(characteristic property)的元素所組成的集合，例如在平面幾何中一個以 O 點為圓心，R 為半徑的圓是一個平面中的點集(Set of point in Π)Γ(O,R)，其中之點的特徵性質就是$\overline{OX}=R$，通常寫成

$$\Gamma(O,R)=\{X|\overline{OX}=R\}$$

這種描述法：

$$A=\{X|X\text{ 具有其特徵性質 }\alpha\}$$

叫做特徵性質描述法乃是最為有用、重要的集合描述法，它把一個性質α和以α為其元素的特徵特質的集合在理念上密切關連起來，此事簡樸自然，平實近人，但是意義重大。我們在此應該感激 George Boole 這方面的真知灼見。

§1.2 集合與邏輯

邏輯學(logic)在古希臘文明扮演重要角色，其所研討者乃是性質之間的從屬關聯，例如性質 α 和 β 之間，若有 α 成立時則 β 也必然成立。如今常用符號 α⇒β 表述這種蘊含(implication)邏輯關係。當年他們熱衷於這種邏輯關係，來研究分析繼承於古埃及文明和巴比倫文明的幾何與天文知識，可以相當有系統地達成幾何性質上的以簡御繁，可以把空間本質的知識由歸納、分析轉進到綜合、推理、論證，條理井然、大放異彩！時至今日，希臘幾何學依然是世世代代的晚學後進培訓邏輯思維的「佳園」。但是邏輯學本身的返璞歸真平易近人，卻一直到十九世紀中葉，才豁然開朗，主要歸功於 George Boole 在《思想的代數》(the algebra of thought)中所闡述的真知灼見，其基本思想大致如下：

對於兩個明確的性質 α 與 β，令 A 與 B 分別是以 α 和 β 為其特徵性質的集合，亦即

$$A=\{X|X\text{ 具有性質 }\alpha\},\quad B=\{Y|Y\text{ 具有性質 }\beta\}$$

則$A\subseteq B$和 α⇒β 其實是同一件事的兩種表述！

再者，易見兩個分別以α_1和α_2為其特徵性質的集合A_1和A_2，它們的交集$A_1\cap A_2$及併集$A_1\cup A_2$也就是那個以"α_1和α_2"及以"α_1或α_2"為其特徵性質的集合。上述簡樸精到的論述一蹴而成地把性質與性質之間的各種各樣邏輯關係(logical relationships among properties)系統地轉換成其相應的集合與集合之間的關係(corresponding relationship among sets with them as the characteristic properties)，而後者遠比前者具體、明朗、簡潔、好用，Boole 的頓悟，一語點醒芸芸眾生，嘉惠後世，功德無量。

§1.3 集合的運算與運算律，思想的代數(波爾代數)

任何一種嚴謹的討論，是不可以漫無邊際的，改用集合的觀點來看，亦即一個嚴謹的討論中，所涉及的元素其實是具有明確的範疇的。例如我們在討論平面幾何學時，其範疇就是平面上的點，所用到、談到的集合皆為平面的子集(subset of points on the plane Π)及至研討立體幾何學，我們的範疇就擴充到全空間，而所涉及的集合則是空間的子集。其實，空間的「元素」乃是「位置」(locations)，而空間(space)的本質就是宇宙中所有可能的位置的總體(the totality of all possible location of the universe)，在幾何學中，以點標記位置，所以把空間本身想成(或稱之謂)一個點集(set of points)。

通常我們把這個適可而取(properly chosen)的範疇(realm)叫做宇集(universal set)。由此開宗明義，所討論的集合皆為其子集合，例如平面幾何學的宇集就是 Π 而立體幾何學的宇集就是全空間 V。

＊集合運算與運算律：

對一個選定的宇集 U 的所有子集 A、B 等等，我們可以把交集(intersection)A∩B 想成 A 和 B 的乘積(the product of A and B)，把併集(union)A∪B 想成 A 和 B 的和(the sum of A and B)把包含"⊆"看成大小關係(order relation)。易見他們具有下列慣用好用的集合運算律(law of operation of sets)，即有

(i)$A\cup B = B\cup A$，$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
(ii)$A\cap B = B\cap A$，$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
(iii)$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$，(分配律)
(iv)$\emptyset\subseteq A\subseteq U$
(v)$\emptyset\cap A=\emptyset$，$U\cap A = A$
(vi)A 的補集(complementary set)定義為

$$\sim A \coloneqq \{X\notin A\}(\text{亦即}\{X|X\in U \text{ 和 } X\notin A\})$$

亦即其特徵性質是

$$A\cap(\sim A)=\emptyset \text{ 而且 } A\cup(\sim A)=U$$

例如在平面幾何中 U=Π（平面上的點）

若 $A=\{X \mid \overline{OX}\leq R\}$ 則 $\sim A=\{X \mid \overline{OX}>R\}$

若 A=一條直線 L 則 ~A 是直線外之點所成者，它是其兩側之半面的併集。

這樣，一個給定宇集 U 的所有子集就構成一個易算好用的體系，Boole 稱之謂思想的代數，如今則稱之為波爾代數(Boolean Algebra)，它簡明扼要地反映了邏輯學(logic)的精要。

＊<u>波爾代數</u>(Boolean Algebra)

在初中代數中，我們業已經熟悉多項式(polynomial)的運算，其本質乃是含有<u>元</u>(indeterminate)的代數式的運算，要點在於這些元，如 x,y,z 在他們和係數之間的運算滿足<u>數的運算律</u>，亦即加、乘的交換律、結合律與分配律，以及乘方的指數定則。

若將集合運算的運算律和數的運算律做一比較分析，前者不但具有同樣的 ∪ 與 ∩交換律、結合律與分配律，而且還具有下述大為簡化的通性，即

$$A\cap A=A，A\cup A=A$$

因此只有 A 的“0 次方”和“1 次方”，亦即

A^0=U，A^1=A，而且有A^n=A 對於 n≥1 皆成立，再者 A 的整數倍也只有 0 倍和 1 倍，亦即 $0\cdot A=\emptyset$，$1\cdot A=A$，而且 $n\cdot A=A$ 對於 $n\geq 1$ 皆成立。

在集合運算中，<u>補集運算</u>是獨具一格者，前列述涉及「～」的運算律如下：

$$\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)$$
$$\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)$$
$$\sim(\sim A)=A$$

＊<u>波爾多項式的代數</u>

設 A,B,C 等表示某一給定宇集 U 中的任一子集的集合變元(variable set)我們將以符號 f(A,B,C…)表示把它們用交集、併集與補集(亦即∩ 、∪與~)這三種運算加以表達的算式，稱之為<u>波爾多項式</u>(Boolean polynomial)。我們將以三元波爾多項式為例，討論他們的簡樸精要，讀者不難由此看到如何把此事推廣到一般 n 元的<u>波爾多項式</u>，這也就是思想的代數的基礎理論。

(i)系統地運用分配律展開集項,即可把一個給定的波爾多項式整理成單項式的併

集，略去空集之項，則所剩之非空單項式乃是$\{A, \sim A; B, \sim B; C, \sim C\}$的交集，但是每對之中至多只取其一，因為

$$A\cap(\sim A)，B\cap(\sim B)和\ C\cap(\sim C)=\emptyset$$

(ii)再者，若有不含有 A 或~A(B 或~B；C 或~C)的單項式，則可以把它改寫成

$$g(B,C)=(A\cup(\sim A))g(B,C)=A\cap g(A,B)\cup(\sim A)\cap g(B,C)$$

$$或\ g(A,C)=(B\cup(\sim B))\cap g(A,C)=B\cap g(A,C)\cup(\sim B)\cap g(A,C))，等$$

由此可見，任給 f(A,B,C)皆可唯一地表達成下述八個單向式的併集之組合，即

$A\cap B\cap C$，$A\cap(\sim B)\cap C$，$A\cap B\cap(\sim C)$，$A\cap(\sim B)\cap(\sim C)$，
$(\sim A)\cap B\cap C$，$(\sim A)\cap(\sim B)\cap C$，$(\sim A)\cap B\cap(\sim C)$，$(\sim A)\cap(\sim B)\cap(\sim C)$
之中選取幾個的併集，稱之為三元波爾多項式的<u>標準式</u>。

(iii)由 $U=A\cup(\sim A)=B\cup(\sim B)=C\cup(\sim C)$，即有

$$U=[A\cup(\sim A)]\cap[B\cup(\sim B)]\cap[C\cup(\sim C)]=上述八個多項式的併集$$

再者，上述八個單項式的<u>任給兩者的交集皆為空集</u>（亦即不相交(disjoint)），因為這種交集都至少含有因式 $A\cap(\sim A)$，或 $B\cap(\sim B)$，或 $C\cap(\sim C)$，亦即含有空集因子，所以當然也是空集。

上述對於三元波爾多項式的標準展開式的討論很容易推廣到 n 元波爾多項式，亦即 n 元波爾多項式 $f(A_1、A_2\text{..........}A_n)$皆可以寫成$2^n$個單項式中選取其中某種組合之併集；每個單項式都是$\{A_i,(\sim A_i)；i=1，\ldots，n\}$這 n 對中各取其一且僅其一的交集，他們都是互不相交的，這就是波爾多項式的基本定理，它也是 computer 的基礎理論之所基。

§1.2 理性認知：哲理思想與方法

人類生存於其內的宇宙是廣大無邊、繁複多樣、變化無窮的。驟看起來，令人眼花撩亂、無法想像，但是詳加深究則又可以發現其中蘊含著各種各樣的規律，例如日、月、星象和四季的變化、水流趨低、空間的對稱性等等。理性認知就是實事求是、由表及裡、精益求精的去研討、探討宇宙的內在本質與原理，幾千年來，世代相承、百折不餒、千錘百鍊的理性認知之所得所知之結晶與總體稱之為理性文明(Civilization of rational mind)。

遠在紀元前六世紀，Pythagoras(585~501BC)總結了巴比倫文明和古埃及文明的成就與思想，提出下述哲理性信念(philosophical belief)：

> 「宇宙是具有精簡、和諧的內在本質與原理的；而且可以經由數、比值與形的研究，由表及裡去認知其理。」

高瞻遠矚，兩千多年來一直啟發及激勵著世世代代的先賢志士，獻身於理性文明的承先啟後與繼往開來之宏偉事業。如今回顧反思，其中「數、比值與形的研究」則可以解讀為數理分析與幾何學。畢氏學派當年就身體力行，致力於定量幾何基礎論(foundation of quantitative geometry)之創建（參見§3.1）。兩千多年來理性文明的進展，使得我們對畢氏的創見深切體驗其真知灼見，如今可以說業已是眾所皆信的共識了。

宇宙本質的至善至美在於至精（基本原理）具有至簡形式這種神奇的精簡合一（亦即和諧），例如萬有引力定律。所以我們要致力於精益求精，而至簡的至精則使得以簡御繁大有可為、氣概萬千。

畢氏兩千五百年前的先見之明，令人高山仰止，我等後學在此當習而時思之！

＊<u>科學思想與科學方法(概述與簡介)</u>

（一）<u>歸納與演繹的相互為用、相得益彰：</u>

在我們對於某一領域或某一事物、現象的實事求是探索認知的歷程中，一方面要從實驗、分析之中綜合歸納(synthesis、induction)去探索其精要本質。而另一方面，我們又要用邏輯推理與數理分析(logic、deduction and mathematical analysis)去研討業已認知的本質，甚至於有待認知的猜想的內涵(implication)。在科研求知的實踐中，他們是相輔相成的兩個方面與方向，妥加配合則每每能相互為用，相得益彰，在學習理性文明中，應該體認兩者的有效配合，習而時思之。

（二）<u>理論與實際(theory and realities)</u>：

概括地來說，各種各樣的實際事務、現象是繁複多樣、千變萬樣的，但是他們內在的本質與原理卻又往往是精而簡的（畢氏哲理信念）。理性認知所致力的研究探討就是由表及裡、精益求精去認知其精簡，以期得知其至精、至簡與精簡合一的理論。不難想到、看到既精且簡的理論，自然可以回頭來以簡御繁，應用來解決各種各樣實際問題，由此可見，理論與實際之間的相互關聯，大體上可以概括表述如下：

$$\{\text{實際}\}\ \underset{\text{繁御簡以}}{\overset{\text{由繁精簡}}{\rightleftarrows}}\ (\text{理論})$$

(三)空間本質的基本重要性與幾何學在理性文明中所扮演的角色(詳見[1])

空間(space)之中，最為原始簡單的概念乃是位置(location)，通常我們以點(point)標記一個位置、其實，點就是位置的抽象化，空間本身乃是宇宙之中所有可能的位置的總體(the totality of all possible locations in the universe)。總之，宇宙中一切事物皆存在於其中，所有現象皆發生於其內，當然都為空間的本質所蘊育也受其所制約的。由此可見，對宇宙精簡和諧的認知當然得先經過空間本質之精簡的認知做起。這就是幾何學，它理所當然的是理性文明的第一科學(number one science)，即是理性文明的基礎所在也自然而然的是它的啟蒙與發祥地。

如今回顧反思，天文、物理以及宇宙中各種精簡和諧的內在本質與原理，歸根究底其實都根植於空間的至精至簡、至善至美，這也就是為什麼兩千多年理性文明的發展中，幾何學一直都扮演核心的角色(詳見[1])

(四)抽象化之方法論（數理分析與以簡御繁的典範）

抽象化(abstraction)是認識問題、解決問題的一種思考分析的方法，在數理分析，解析思維上是一種好用、常用的方法。概括言之，其要點在於擇其精要妥加組織，從而簡樸精到地解決問題，在此我們且以紀元前約 205 年，Alexandria 的 Eratosthenes 在估計地球之大小上成功的典範來說明善用抽象化的要點(參見§4.1)。他認識到測估地球大小的精要在於下述三點，即

其一，地球的幾何本質是一個大球體。

其二，日一地之距離比之於地球的半徑要大很多倍，所以照射地面的太陽光基本上可以看做平行。

其三，在夏至正午，在正南方的 Syene 陽光垂直於地面，但是在 Alexandria 則和垂直桿之間大約有$7^\circ 12'$的夾角。

他當年把上述三點（擇其精要）妥加組織的辦法乃是善用抽象化，用圖 4.2 把它

們之間的幾何關係簡潔地表達成一個抽象的圖解，從而一目瞭然地得出 A-S 弧在地心所張的地心角也是$7^\circ 12'$，所以地球之大圓週長乃是 AS 弧長的 50 倍（詳見§4.1）。

抽象化在現代的數理分析中廣泛、系統地運用。大體上來說，先要把認識問題做得簡樸精到（亦即擇其精要，妥加組織）。它往往是一種抽象的數理模型（例如是一個線性空間），因此就把所要解決的問題，抽提到能夠有效能解的數理分析。總之，抽象化的要點在於適度的抽象和妥善之組織，讀者宜於在學到，用到時用心分析、體認，習而時思之。

第二章 重訪希臘定性平面幾何學：理性文明之啟蒙

幾何學乃是空間本質的認識論，宇宙中一切事物與現象皆存在於其中，發生於其內；理所當然都為空間本質所孕育，亦受空間性質所制約，由此可見，認知大自然的各種事務與現象，都必須先行認知空間之本質，所以幾何學自然而然地成為理性文明的第一科學（參看§1.2 的討論）。

從認知大自然的方法論來看，任何一門科學都必然植基於實踐經驗，逐步逐樣以分析、綜合、歸納；去實事求是，認知其本質。幾何學當然也不例外，先得有足夠的實驗幾何認知上的累積，例如巴比倫文明和古埃及文明都業已掌握豐富的實驗幾何上的認識，希臘文明在幾何學上的重大成就乃是在古埃及和巴比倫的實驗幾何認知的基礎上，更上一層樓、改弦更張，創建推理幾何學。如今回顧反思，理性文明的啟蒙，即在於紀元前六、五世紀所創建的定性平面幾何學。

§2.1 推理幾何學之啟蒙

＊<u>平面的基本幾何學性質</u>

平面乃是空間之中的二維平直子集；平面幾何乃是立體(亦即空間)幾何之中比較簡單而且易見其理的一部份，它給進一步研究立體幾何提供了自然的階梯。平面的基本性質有四，即：

<u>其一：連結與分隔</u>：兩點定一直線段乃是平面的基本結構，其直觀內涵是：直線段$\overline{AB}$是{A,B}兩點之間的最短通路。再者，一條直線ℓ 被其中任一點分隔成互不連通的半線，而平面 Π 則被其上任給直線ℓ分隔為兩片互不連通的半面。

<u>其二：對稱性</u>

平面 Π 對於其中任給直線ℓ皆為反射對稱(reflectionally symmetric)，亦即 σ_ℓ：$\Pi\to\Pi$，它在 $P\in\ell$時，σ_ℓ(P)=P；而在 P 不屬於ℓ時$\overline{\sigma_\ell(P)P}$被$\ell$所垂直平分，如圖 2.1 所示，{P,P’}和{Q,Q’}是互相對稱之點偶，易見，$\overline{PQ}$=$\overline{P'Q'}$，$\overline{PQ'}=\overline{P'Q}$；ΔAPP′和ΔAQQ’皆為等腰三角形(試自證之)。

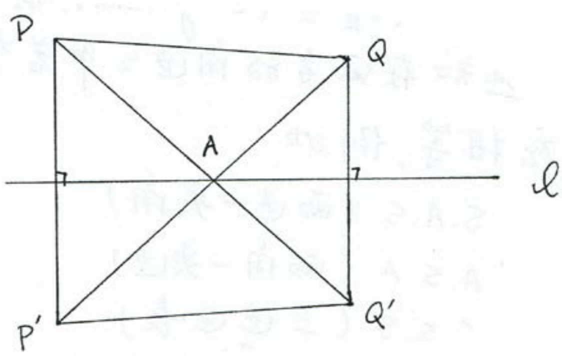


圖 2.1

其三：平直性：三角形的內角和恆等於一個平角(亦即平行性)，此事將在§2.3 中詳加剖析

其四：連續性：直線是連續不斷的，但是一剪就斷。連續性乃是一個直觀明顯，但是內蘊精微的幾何性質，其重要性在定量幾何基礎論中才初現而且認知(參見第三章的論述)。

在定性平面幾何中，我們將專注於前兩個基本性質的研討，這也就是當年推理幾何學在其啟蒙階段的主題。

＊疊合與對稱的幾何：

直觀上，若有平面中的兩個三角形ΔABC 和ΔA'B'C' ，把一個剪下來，移到另一個上方，若能完全相重疊，則顯然其三對對應邊等長，三個對應角大小相同，稱之為"全等"或疊合(congruent)。在巴比倫和古埃及文明就已熟知在兩者的角邊之中若有某些角邊之組合對應相等，例如：

S.A.S(兩邊一夾角)

A.S.A(兩角一夾邊)

S.S.S(三邊邊長)

對應相等，則其他三者亦必然相等。此事乃是在實驗幾何中業已熟知的三角形疊合條件。

話說當年，古希臘幾何學的啟蒙階段的幾何學家們(Thales 是其中的代表性人物)試著改弦更張，對於他們繼承於古埃及、巴比倫的幾何知識改用推理論證來分析其間的邏輯關係，從而加深認識，在性質上達成由繁精簡、以簡馭繁。

長話短說，有鑑於三角形乃是平面圖形的至精至簡；而全等性則是直觀上一目瞭然的幾何之等同。所以當年以三角形全等性的研究作為啟蒙階段的起步，是既自然又明智的選擇。其實，當時業已熟知兩個三角形ΔABC 和ΔA'B'C 之間若有相應的邊、角、邊(S.A.S)、或角、邊、角(A.S.A)或是邊、邊、邊(S.S.S)相等，則其餘的角邊必然也相等(亦即全等)。再者滿足 S.A.S(或 A.S.A)的兩個三角形能夠互相疊合乃是直觀明顯的，其理可以簡述如下：

(i)設ΔABC 和ΔA'B'C'之間具有$\overline{AB}$=$\overline{A'B'}$，∠B 和∠B'和$\overline{BC} = \overline{B'C'}$，我們可以設想把ΔA′B′C′移到ΔABC 之上方，使得A′、B′分別和 A、B 相重。由所設∠B=∠B'，所以射線$\underset{BC}{\rightarrow}$和$\underset{B'C'}{\longrightarrow}$也因而相重。再者，由於$\overline{B'C'}$=$\overline{BC}$，可見 C'必然也和 C 點相重。最後，因為兩點定一直線段可知$\overline{A'C'}$和$\overline{AC}$也相重，亦即兩者疊合在一起。

(ii)設ΔABC 和ΔA′B′C′具有$\overline{AB}$=$\overline{A'B'}$，∠A=∠A'和∠B=∠B'，則一如上述把 A'、B'分

別和 A、B 相重的試加疊合。由所設∠A=∠A'與∠B=∠B'，可知射線$\underset{AC}{\rightarrow}$和$\underset{BC}{\rightarrow}$分別和$\underset{A'C'}{\longrightarrow}$

和$\underset{B'C'}{\longrightarrow}$皆為相重疊，在此即可用兩線相交唯一確定其交點得知C'必然和C點相重，

亦即ΔA'B'C'和ΔABC 相疊合。

總之，相比之下，疊合條件 SSS 在直觀上要比之於上述 SAS 或 ASA 並不那麼明顯，是否能夠用 S.A.S(或 A.S.A)來推得 S.S.S 呢?如今回顧反思，相信這就是當年 Thales 先用 S.A.S 來證明等腰三角形定理的動機，然後，就容易進而推導 S.S.S 定理，**茲**簡述如下：

<u>等腰三角形：</u>

如圖 2.2 所示ΔABC 的$\overline{AB}$=$\overline{AC}$，稱之為<u>等腰</u>三角形(isosceles triangle)。M 是$\overline{BC}$的中點，不難看到$\overline{AM}$平分頂角而且垂直於底邊。其實，ΔABC 對於 AM 成<u>軸對稱</u>，它把ΔABC 分割為兩個全等的直角三角形。等腰三角形是反映平面的反射對稱性的至精至簡，是往後用來論證平面對稱性的各種各樣表現的基本工具，我們將僅僅用 S.A.S 為基點論證下述定理，它是研究全等形與對稱性的基本引理(fundamental lemma)：

＊<u>定理 1</u>：<u>(等腰三角形特徵定理)</u>：如圖 2.2 所示，下述五點皆為等腰三角形的<u>特徵性質</u>，即

(i)$\overline{AB}$=$\overline{AC}$(定義)，(ii)$\overline{AM}$垂直平分底邊$\overline{BC}$

(iii) ∠B 等於∠C(底角相等)，(iv)頂角平分線垂直底邊

(v)頂角平分線平分底邊

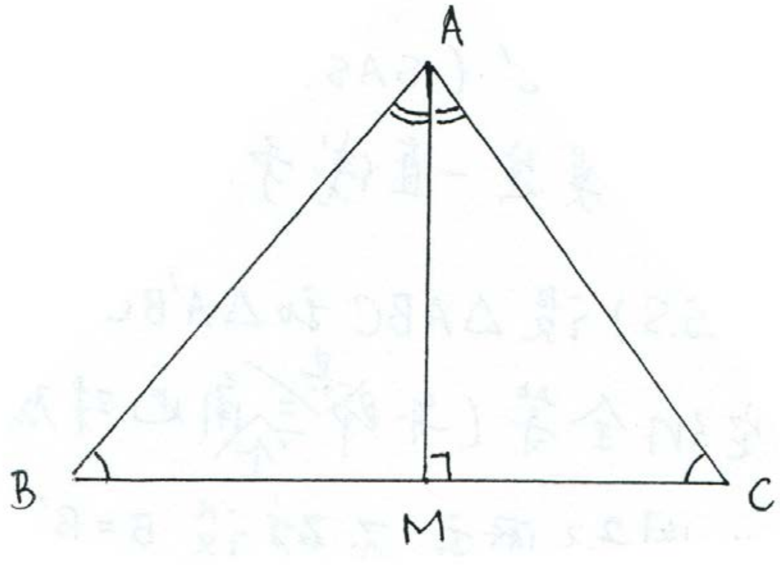


圖 2.2

證明：

1.由(i)或(ii)用 S.A.S 即可見$\Delta AMB \cong \Delta AMC$

即有(i)或(ii)⇒其餘四點

2.再用反證法證明(iii)⇒(ii)：過$\overline{BC}$中點 M 作其垂線，若它也過頂點 A 即得(ii)。假若不然，不妨設它交$\overline{BA}$於 A'點。則ΔA'BC 為等腰，即有∠B 等於∠BCA'< ∠C 之矛盾。

3.再用反證法證明(iv)⇒ (i)如下：假若不然，設$\overline{AB} < \overline{AC}$，在$\overline{AC}$中取 C'點使得$\overline{AC'}$=$\overline{AB}$，則有$\overline{BC'}$也和$\overline{AM}$正交，此事和兩點定一直線矛盾(參看定理 4)。

4.最後，用反證法證明(v)⇒ (iv)：假設中線 AM 和 BC 並非正交，過 M 點作 AM 之垂線，分別交 AB 和 AC 於 B'點和 C'點。由(iv)可知$\overline{MB'}$=$\overline{MC'}$，則有$\Delta MBB' \cong \Delta MCC'(\mathrm{S.A.S})$，即得∠MB'B 等於∠MC'C，此事又和兩點定一直線矛盾(參看定理 4)。

＊<u>定理 2</u>：(S.S.S)設ΔABC 和ΔA′B′C′的三邊對應相等，則他們全等(亦即其三個角也對應相等)。

證明：

如圖 2.3 所示，不妨設 B=B'，C=C'，而 A、A'分居於 BC 之兩側。

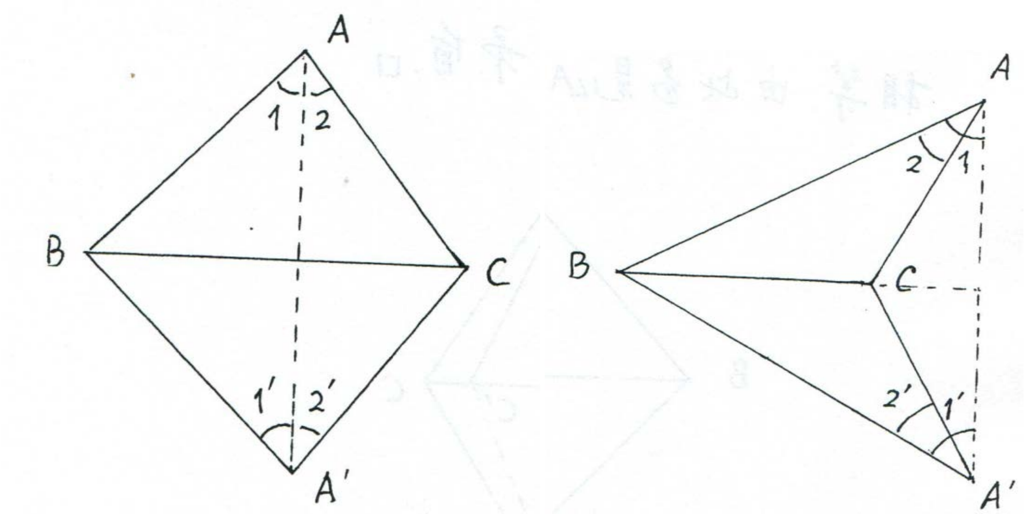


圖 2.3

連結$\overline{AA'}$，即有ΔBAA′和ΔCAA′皆為等腰，由定理 1 即得∠1=∠1'和∠2=∠2'，而∠A 和∠A'同為上述兩對角之和(或差)，如此即得∠A=∠A'；因而ΔABC≅ A′B′C′(SAS)。

＊<u>定理 3</u>：

(A.S.A)設ΔABC 和$\Delta A'B'C'$滿足$\overline{AB}$=$\overline{A'B'}$和∠A=∠A'，∠B=∠B'，則$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$。

<u>證明</u>：不妨設 B=B'，{B,C,C'}三點共線而 A、A'分居於該線之兩側。假若 C、C'也相重，則兩者滿足 S.A.S 全等條件；假若不然，不妨設$\overline{BC'} < \overline{BC}$，如圖 2.4 所示，

ΔBAA'為等腰，由定理 1，可見$\overline{BM}$垂直平分$\overline{AA'}$，而且$\Delta BAA'$、$\Delta CAA'$和$\Delta C'AA'$皆有底角相等，由此易見∠A > ∠A'之矛盾。

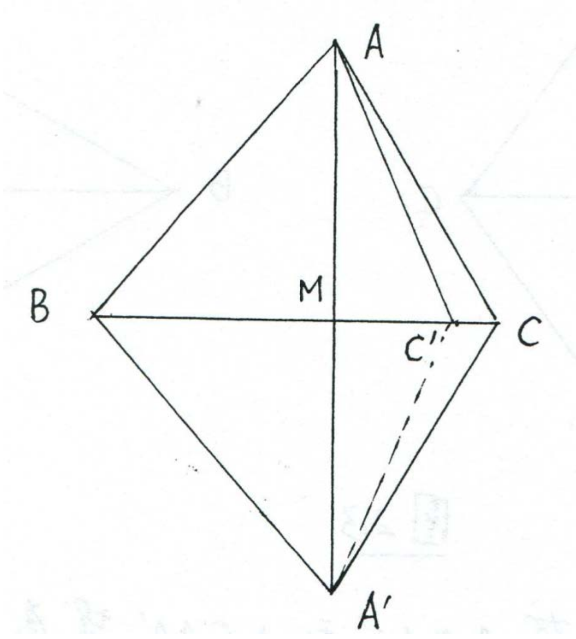


圖 2.4

§2.2 定性平面幾何學：概述與重訪

定性平面幾何學乃是以連結與分隔和對稱性這兩個基本性質為基礎的系統論述。對稱性在最為簡單的三角形上的反映就是疊合；而等腰三角形乃是具有反射對稱性的至簡至精，它是具體而微的對稱性之表述和簡樸好用的基本工具。再者 S.S.S(定理 2)則是平面幾何尺規作圖的主要工具，圓則是平面上繞一個固定之心的旋轉對稱之軌道，是最為對稱的平面圖形。

掌握上述幾點，系統發展(或重訪)定性平面幾何學的各種各樣定理和例習題，業已是順理成章，易證易懂之事，在此僅列述其要如下：

＊<u>定理 4</u>：

設直線$\ell_1 \neq \ell_2$而且另一直線ℓ交截之內錯角相等，則ℓ_1和ℓ_2不相交，亦即$\ell_1 \cap \ell_2=\emptyset$。

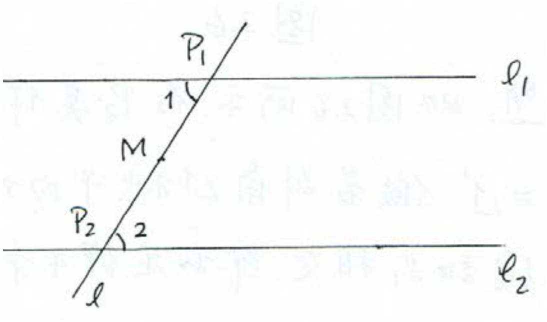


圖 2.5

<u>證明</u>：如圖 2.5 所示，$\ell \cap \ell_1=P_1$，$\ell \cap \ell_2 = P_2$，$\angle 1$ 等$\angle 2$，令 M 為$\overline{P_1P_2}$之中點，易見上述圖形對於 M 點成<u>心對稱</u>(亦即在繞 M 點旋轉π之下ℓ_1、ℓ_2互換，ℓ反向)假若ℓ_1和ℓ_2相交於ℓ之一側，則他們也必然相交於另一側之對稱點，豈非ℓ_1和ℓ_2相交於兩點，此事和兩點定一直線相矛盾。

<u>推論</u>：三角形的外角大於其內對角。

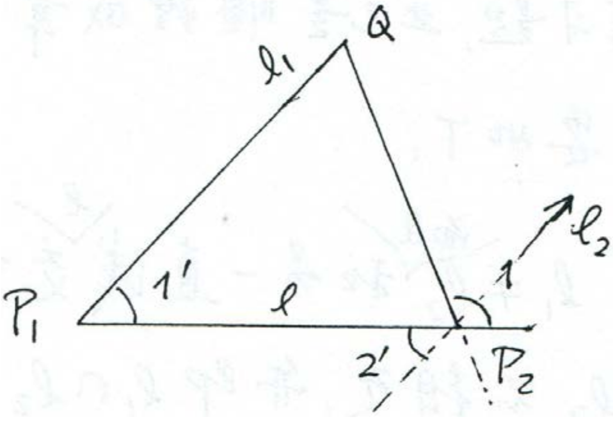
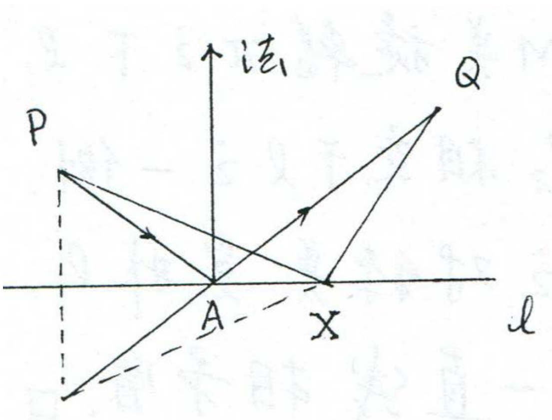


圖 2.6

證明：如圖 2.6 所示在P_2點做ℓ_2使得內錯角$\angle 2'=\angle 1'$。假若外角$\angle 1$ 不大於內對角$\angle 1'$，則ℓ_2必須和ℓ_1相交，即和定理 4 矛盾。

【習題】

1)光的反射定律與極小性：光的反射定律是：入射線、反射線和反射面之法線三線共面，而且他們和法線之夾角相等，如下面所示，試證：



$\overline{PX}+\overline{XQ}\geq\overline{PA}+\overline{AQ}$

而且等號當且僅當

X=A 時才成立。

2)試證ΔABC 的三角平分線共交於一點(它是內切圓圓心)。

3)試證ΔABC 的三邊之垂直平分線共交於一點(它是外接圓之圓心)

4)設 O 是ΔABC 的外接圓圓心，試證

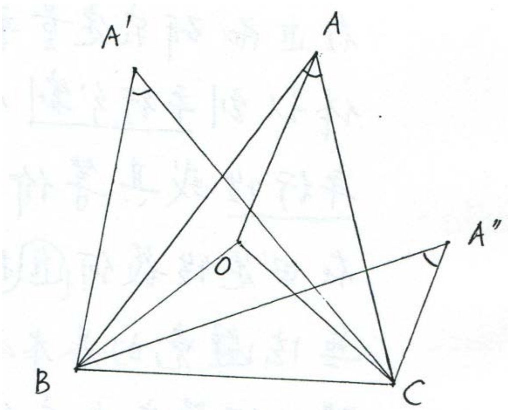
$\angle B+\angle C-\angle A=\angle COB$

5)設四邊形 ABCD 是一個圓的內接四邊形，試證$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$

6)設四邊形 ABCD 兩對對邊各別等長，試證

(i)其對角線互相平分

(ii)其兩對對角相等



7)設四邊形 ABCD 的對角線互相平分，試證其兩對對邊各別等長

8)令ℓ為ΔABC 在 C 點之外角平分線，試證ℓ上任給 P 點，皆有

$$\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AC}+\overline{CB}$$

而且等號只有在 P=C 時才成立。

§2.3 溫故而知新：兩個當年失之交臂的基本定理

中國古算和希臘幾何，都認識到矩形面積公式在進而研究定量平面幾何中的基本重要性，而且也體認到平行分割乃是論證它的不二法門。總之，平行性或其等價的“三角形內角和恆為平角”，乃是在由定性幾何推進到定量幾何必須充分理解，無法避免的基本認知!如今回顧反思，當年古希臘幾何學家在這個關鍵性的要點上未能深究；因而出於無奈，引用第五公設的處理方式，使得幾何學在「平行性的真諦何在?」這個問題上困惑達兩千年之久，此事一直到十九世紀非歐幾何學的發現才認清其理。

其實，當年若能在「三角形內角和」這個議題上加以深究，就不難發現，論證下述兩個引人入勝的定理，即：

＊<u>定理 5</u>：任給三角形的內角和恆不大於一個平角

＊<u>定理 6</u>：若存在有一個三角形之內角和等於一個平角，則所有三角形的內角和皆等於一個平角。

<u>歷史的回顧</u>：當年若能發現上述兩個在三角形內角和上的基本定理，則在進而研究定量平面的關鍵時刻，在三角形的內角和上只有恆等於平角或者恆小於平角這樣兩種選項(choices)。再者，在後者之幾何中根本沒有矩形，所以選用前者先行研究乃是自然的選擇，也只有先將恆等於一個平角的平面幾何研究到足夠清楚的基礎之上，才達到行有餘力、水到渠成，進而研究另一個選項的幾何學，這就是現在稱謂非歐幾何學者。

<u>定理 5 之證明</u>：(注意：只用 S.A.S 及其推論)

要點在於圖 2.7 所示的構造：設α, β, γ分別是ΔABC 在 A,B,C 的內角，而α是其中最小者，令 M 為$\overline{BC}$之中點，延長$\overline{AM}$至 A_1 點，使得$\overline{A_1M}=\overline{MA}$。

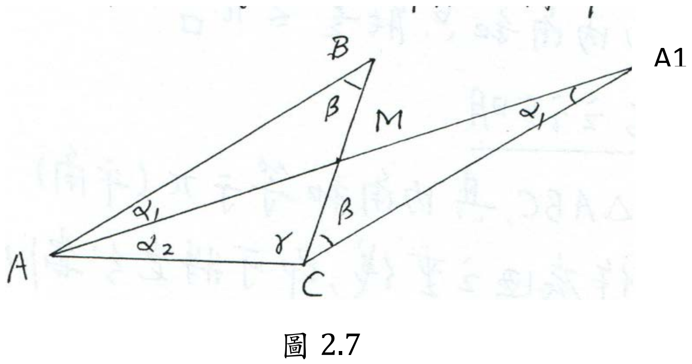


圖 2.7

由所作易見$\Delta ABM \cong \Delta A_1MC$(SAS)，所以$\Delta A_1AC$ 的內角和等於ΔABC 者，亦即

$$\alpha_1+\alpha_2+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma，(\alpha_{1+}\alpha_2=\alpha)$$

由此可見，ΔA_1AC 的三個內角之最小者，至多等於原先者之半。
現在就可以用反證法證明$\alpha+\beta+\gamma\leq\pi$。
假若不然，設有一個ΔABC 其內角和等於 $\pi+\delta$，$\delta>0$。我們可以用上述構造逐步得到內角和保持在$\pi+\delta$的三角形，而它們的最小內角逐步至少減半，亦

$$即有\alpha_n\leq(\tfrac{1}{2})^n\alpha，$$

當 n 足夠大時，顯然有$\alpha_n<\delta$。亦即，它在其最大內角之外角必然小於其內對角，和定理 4 的推論矛盾。
所以三角形的內角和只能是$\leq\pi$。

<u>定理6之證明</u>：

設有ΔABC其內角和等於π(平角)，由其最大角之頂點作底邊之垂線，即可將它分割成兩個直角三角形ΔABH 和ΔAHC。由定理 5 得知兩者的內角和都$\leq\pi$，而兩者的內角總和比原先多加兩個$\frac{\pi}{2}$，所以是 2π，由此亦見它們的內角和也都等於π。

再者，由一個內角和等於π的直角三角形，我們可用如圖 2.8 所示，用來構造一個矩形，其半為上述直角三角形。然後再堆砌成要多大就多大的矩形，使得一個任給的直角三角形ΔABC 皆可放置於左下角。由定理 5，易證ΔMCN的內角和等於π，然後逐次再用定理 5，即可作下述推論：

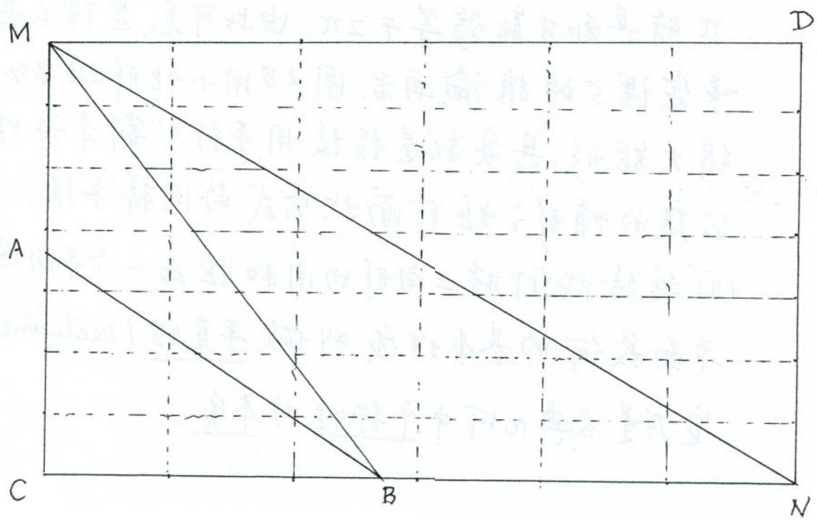


圖 2.8

$$\Delta MBC \text{ 的內角和} + \Delta MBN \text{ 的內角和} = 2\pi$$
$$\Rightarrow \Delta MBC \text{ 的內角和} = \pi$$
$$\Rightarrow \Delta ABC \text{的內角和} + \Delta ABM \text{ 的內角和} = 2\pi$$
$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ 的內角和} = \pi$$

由此易證任給三角形的內角和皆恆等於π。

【註】:

(i)定理 6 的證明中，定理 5 是關鍵，用它才能由ΔMCN的內角和等於π逐步分割推論ΔABC的內角和也等於π。因為兩個不大於π 的和，只有在兩者皆等於π 時其和才能夠等於 2π。由此可見，定理 6 其實是定理 5 的推論。再者，圖 2.8 用小矩形堆砌而得大矩形，其實就是往後用平行分割來證明可公度的情形之矩形面積公式的同樣手法。

(ii)往後我們將三角形的內角和恆為一個平角這個平面幾何的幾本性質叫做<u>平直性</u>(rectilinearity)，它乃是古典幾何中<u>平行性</u>的<u>本質</u>。

§2.4 平行四邊形與平行分割

在全等形與對稱性的研討中，等腰三角形是體現反射對稱性的至精至簡，而它的幾種特徵性質之間的邏輯運用則是認知、探討對稱性的種種妙用的基本方針與工具。當我們進而研究定量幾何時，平行性是必要的基本性質，而平行四邊形則是完全展現平行性的至精至簡，而它的特徵性質定理，則是用來解決涉及平行性的幾何問題的基本引理。

＊<u>**定理 7**</u>(平行四邊形的特徵性質)：如圖 3.1 所示，平行四邊形□ABCD 具有下列幾種特徵性質：

(i)AB//DC，AD//BC(定義)。

(ii)$\overline{AB}$=$\overline{DC}$，$\overline{AD}$=$\overline{BC}$。

(iii)兩對對角各別相等。

(iv)對角線互相平分。

(v)一對對邊平行且等長。

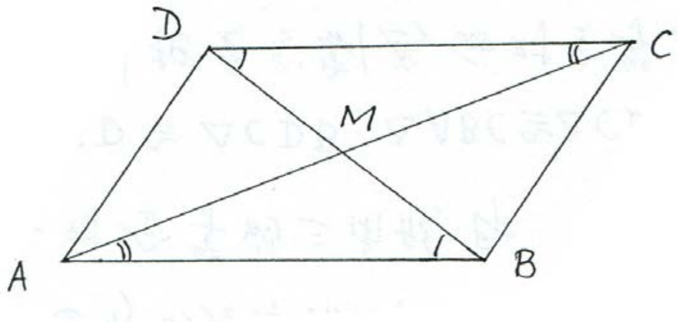


圖 3.1

<u>證明</u>：

平行四邊形的基本結構乃是它的一條對角線各別把它分割成一對全等的三角形，即：

$$\Delta ABD \cong \Delta CDB；\Delta ABC \cong \Delta CDA(SAS)$$

而兩條對角線則把它分割為兩對全等三角形，即：

$$\Delta MBA \cong \Delta MCD；\Delta MAD \cong \Delta MCB(ASA)$$

由此可見，它對於 M 點成心對稱（其實，平行四邊形乃是具有心對稱的平面圖形之中的至簡）。

基於上述分析，本定理的論證是簡樸易證的，此事留作習題。

【註】：上述五點平行四邊形的特徵性質，每個都含有兩個等式，上述邏輯等價的性質之間的轉換、推論則是平行性的基本用法。

例 1：矩形的平行分割與面積公式

一個長寬分別是單位長 u 的整數倍的矩形，例如：L=m·u，w=n· u，它可以用平行分割為 mn 個單位長的方格堆砌而成，所以其面積等於 m·n 單位平方，亦即：

$$A(\square(L,w))=mnA(\square(u,u))$$

例 2：如圖 3.2 所示，L、M 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，則有

$$\overline{LM}//\overline{BC}\text{而且}\overline{LM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$

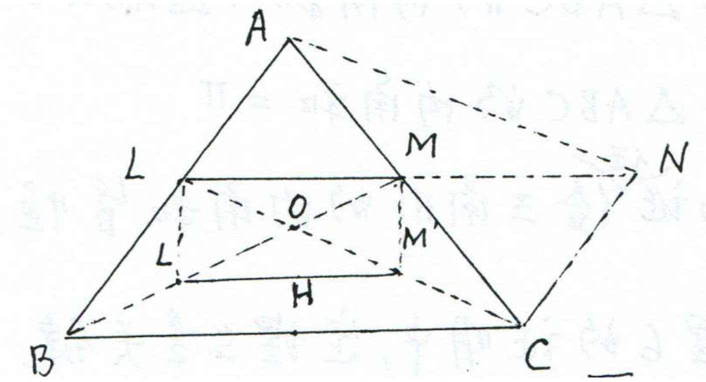


圖 3.2

證明：

將$\overline{LM}$延長一倍，即有$\overline{MN}$=$\overline{LM}$，四邊形 LCNA 的對角線互相平分，由定理 7 之(iv)得知它是平行四邊形，因此由定理 7 之(v)得到

$$\overline{NC} \overset{//}{=} \overline{AL} \Rightarrow \overline{NC} \overset{//}{=} \overline{\mathrm{LB}} \Rightarrow \overline{LN} \overset{//}{=} \overline{BC}$$

其中 $\overset{//}{=}$ 表示平行且等長。

【註】：上述證明一方面是定理 7 的簡潔用法的簡樸實例，而另一方面則是運用平行分割由「全等」邁向「相似」的初步。例如，同理可見其餘兩條中點連線也有

$$\overline{MH}//\overline{AB}\text{，}\overline{MH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$\overline{LH}//\overline{AC}\text{，}\overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

它們把ΔABC 平行分割成四個全等的小三角形，在第三章之§3 中，我們將把這種三角形的平行分割歸納地推廣到分成n^2個全等的小三角形，這就是整數比的相似三角形定理的證明法。

例 3：

一個任給的三角形ΔABC 的三條中線交於一點，稱之謂它的重心，它把三條中線分為 2：1 的兩段，此事可以看成例 2 的另外一個推論。令 O 為中線$\overline{BM}$和$\overline{C}$L的交點。L'和 M'分別是$\overline{OB}$和$\overline{OC}$的中點，同理即有$\overline{L'M'}//\overline{BC}$而且$\overline{L'M'}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，由此可見

$$\overline{L'M'} \stackrel{//}{=} \overline{LM}$$

由定理 7 之(v)得知□L'M'ML 乃是一個平行四邊形，所以由定理 7 之(iii)即得 O 點平分其對角線$\overline{L'M}$和$\overline{LM'}$；亦即 O 點分別把中線$\overline{BM}$和$\overline{CL}$分為 2：1 的兩段，由此可見它的另一中線 AH 也經過 O 點。

【註】：在前一節的習題中，我們可以只用對稱性論證一個任給三角形的三角平分線、三邊之垂直平分線分別共交於一點，而它們分別是ΔABC的內切圓和外接圓的圓心，稱之為內心和外心，但是三中線的共交於一點是有待平行性之引入才能證明的。

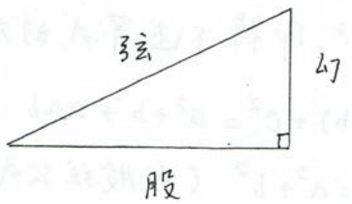
§2.5 中國古算中的定量平面幾何、測地術

在中國古代，治水與工藝促使了幾何的認知，一套簡樸精到的定量平面幾何公式，業已充分掌握，在水利設計師和工匠世代相傳。其中以面積公式、勾股弦公式和出入相補原理所組的測地術善用面積，簡潔高明，至今仍然是定量平面幾何認知的簡明途徑。

矩形的面積等於長乘寬，而它又被其對角線分割為兩個等同的直角三角形，由此易見直角三角形的面積等於底乘高之半，此事在直觀上相當清楚，對於善用分割來計算面積的實踐者，一如例 1 所述的平行分割，業已足夠明顯地解說上述面積公式的可靠性。總之，他們的性向在於致用為尚，因此他們致力於如何用它們來發展一套簡樸好用的測地術。

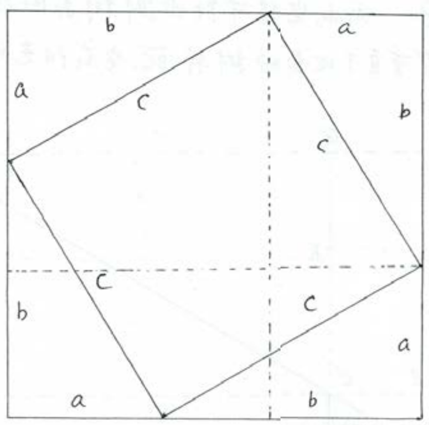
長話短說，中國古算善用分割求面積的藝術來推導測地術中其他的基本公式，其中以勾股弦公式和出入相補的原理，尤為精到簡要，概述如下：

1) 勾股弦公式：如下圖所示，古算中把一個直角三角形的三邊稱之為勾、股、弦，如今，不妨改用 a,b,c 稱之。



他們用下述圖解發現並且簡潔地論證極為基本和重要的勾股弦公式，即：

勾方+股方=弦方$(a^2+b^2=c^2)$



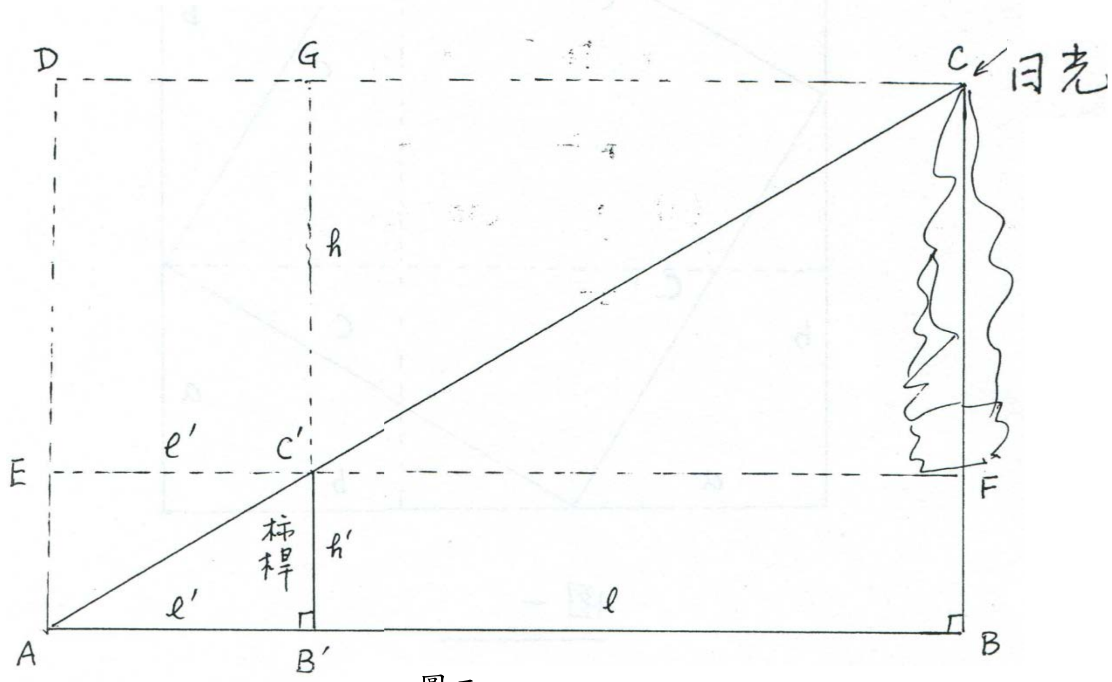
圖一

若用圖一所示的實線與虛線這樣兩種分割來計算(a+b)一方形之面積，即得下述等式的左右兩側：

$$4(\frac{1}{2}ab)+c^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow c^2=a^2+b^2\text{（勾股弦公式）}$$

乾淨俐落，遠比希臘幾何中畢氏定理之證明(參見第三章，§3)簡樸高明。

2)<u>出入相補原理</u>：



圖二

如圖二所示，它很可能由測樹高問題領悟而得者，設想有垂直於地面的樹幹$\overline{BC}$，它在陽光的照射之下的影子為$\overline{AB}$。有一位先賢欲測其高，他想到的方法是將一枝長度為 h'的標桿直立於適當的 B'一點，使得其影子和樹影的末段相重。由他以前對於類似的問題的經驗，他認識到樹高肯定是和影長$\overline{AB}$、標桿長度 h'與標桿的影長ℓ'密切相關。但是如何由上述可量的數據去確切計算樹高呢？幾經思索，他又想到應該善用面積公式來達成此事，於是他把這種想法用樹枝在地上作類似於圖一所示的圖解，要點在於把實線的直角三角形擴充為矩形，便於面積之計算；其中有三對直角三角形，一大包含著兩小，易見等量減等量還是等量（這也就是出入相補）。所以剩下的上、下兩個矩形（即□EC'GD 和□B'BFC'）雖然形狀不同，但是必然具有相等面積，亦即：

$$\ell' \cdot \mathrm{h} = \ell \cdot h'$$

由此他熟練地作下述計算：若改用現代的表述，即為

$$\frac{h}{h'}=\frac{\ell}{\ell'} \Rightarrow \frac{h+h'}{h'}=\frac{\ell+\ell'}{\ell'}$$

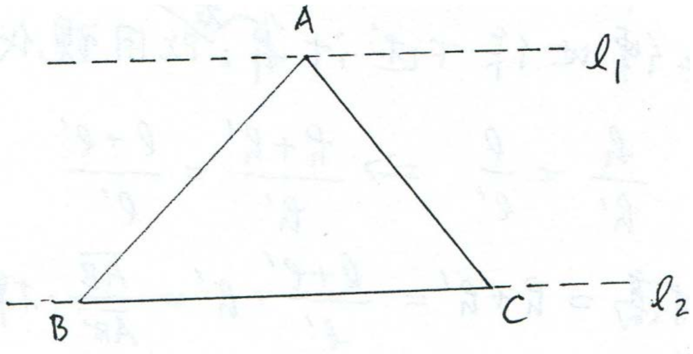
$$樹長 = \mathrm{h} + h' = \frac{\ell + \ell'}{\ell'} \cdot h' = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \cdot 桿長$$

本質上，他善用面積公式，推導得直角相似三角形的直角邊的邊長比例式，若再用勾股弦公式，當然也得出斜邊的比值和勾（或股）的比值也相同。如今回顧反思，這也就是中國古算中，以面積公式、勾股弦公式和出入相補為基礎的測地術業已初步完備的道理。其實，僅僅以矩形面積等於長乘寬，一以貫之、簡明扼要地建立起定量平面幾何的基礎理論，精闢獨到，至今依然是讓初學者入門的最佳途徑。

＊<u>思考分析與習題</u>：

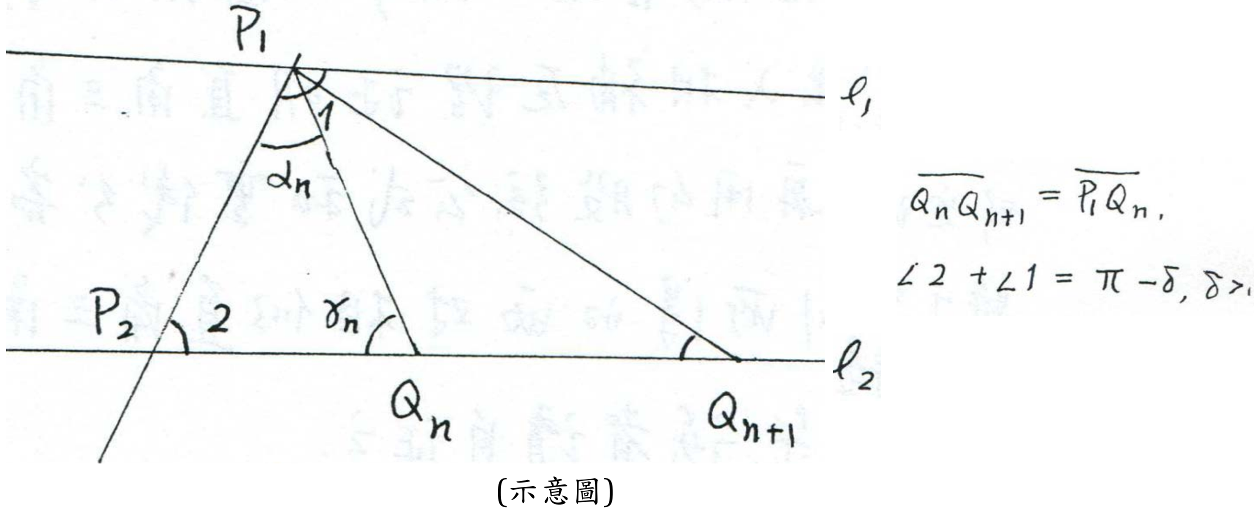
1)<u>平行性與平行公設</u>：由定理 4 得知一對$\{\ell_1, \ell_2\}$和另一直線相交截之內錯角（或同位角）相等，則$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$。而平行公設則以公理方式論斷，它也是$\ell_1, \ell_2$不相交的必要條件，亦即：內錯角相等$\Leftrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

2)平行性⇒三角形的內角和恆等於一個平角（平直性）試證之。



$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

3)平直性⇒平行公設，試證之。



(示意圖)

令$\alpha_n = \angle P_2P_1Q_n$，$r_n = \angle P_2Q_nP_1$，由平直性和$\Delta Q_nQ_{n+1}P_1$等腰，即有：

$$\angle 2 + \alpha_n = \pi - r_n\text{，}\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{2}r_n$$

$$\Rightarrow \pi - \angle 2 - \alpha_n = r_n\text{，}\pi - \angle 2 - \alpha_{n+1} = r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$$

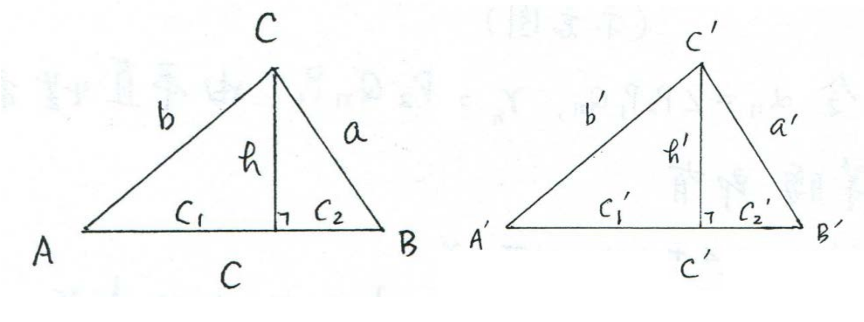
由此易見，在 n 逐步增加，即可得$\gamma_n < \delta$，亦即有$\alpha_n > \angle 1$，所以ℓ_1交ℓ_2於$\overline{P_2Q_n}$之內點。

4)相似三角形定裡的幾種證法：

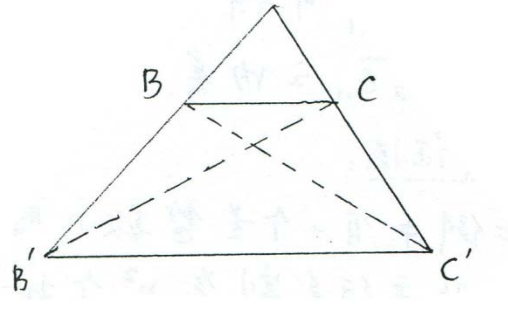
其一：在三對對應邊比例中有一個是整數 n 時，可用平行分割法把大三角形平行分割為n^2個和小三角形全等者，再者，在比例之中有一個是分數$\frac{m}{n}$的情形，則同樣地可以把他們平行分割成m^2個和n^2個全等小三角形。最後，再用逼近論（Eudoxus）把不可公度的情形之證明歸於可公度的上述證明來推導，這就是下一章所要詳加討論的希臘證法。

其二：(中國證法，善用三角形的面積公式)

先用出入相補原理證明直角三角形的相似三角形定理，再用勾股弦公式和垂線分割，把一般情形歸於分割的兩對相似直角三角形的相似比直接推導，讀者請自證之。



其三：用下述分割和三角形面積公式直接推導之。(善用$\Delta=\frac{1}{2}$底× 高之證法)



[提示]：$\Delta BB'C = \Delta BC'C$(同底等高)

$\Rightarrow \Delta AB'C = \Delta ABC'$

第三章　古希臘定量平面幾何基礎論

古希臘的幾何學和天文學是在繼承古埃及與巴比侖的幾何與天文上的知識為基礎，更上層樓，承先啟後，世代相傳，集當代精英歷經幾個世紀的努力才獲得的進展與精華，為全人類的理性文明奠定了堅實的基礎。但是其發展的過程幾經挫折，歷盡艱辛，長話短說，讓我就從畢氏(Pythagoras)的哲理信念說起。

畢氏早年遊學埃及與巴比侖，他回到希臘後總結其所學、所見、所思、所得，提出他對於大自然（亦稱之謂宇宙(universe)）的哲理信念，大體上可以概括如下：

「大自然的表象雖然繁複多樣，但是其內在本質乃是<u>精簡和諧</u>(harmonious)的，我們可以通過<u>數</u>(number)、<u>比值</u>(ratios)與<u>形</u>(shapes)的研究由表及裡去探索其本質。」

改用現代的語句來說，他所創導者，就是宇宙的基本結構是精而簡的，而這種至精以至簡形式表現的精簡合一，實乃畢氏理念中的和諧。 再者，<u>定量分析</u>，特別是定量幾何的研究乃是我們由表及裡，精益求精，認知宇宙的精簡和諧之本質的自然途徑。當年畢氏學派身體力行，也就自然從研討定量平面幾何學做起。我們即將概述其要的基礎（初）論，畢氏學派貢獻良多，並引以自豪。再者，幾何學和天文學乃是古埃及、巴比侖以及其後繼的希臘文明的主導與熱門，所以希臘幾何學家是以「量天」為其志趣的。（在此，和中國的定量幾何以測地與工藝上的致用為尚是具有其志趣與性向上的差異的）

§3.1 長度的度量與可公度性；誤判之公設

有鑒於量天上極為精準的要求，他們在定量幾何的基礎論的研討中，概念力求明確，立論務必嚴謹，決不放過任何細節或瑕疵。首先，他們業已認清長度是眾多幾何量的最為基本者，所以長度的度量的明確定義，乃是建立定量幾何基礎理論的根本與起步，而長度度量的要點則在於妥加定義兩個給定線段a、b之間的比值(ratio)。當年他們所能想到的妥加定義如下：

線段長的可公度性與比值之定義：
設線段a、b分別是另一線段c的整數倍，即有$a=m\cdot c, b=n\cdot c$，則稱a、b為可公度(commensurable)而a、b在長度上的比值則定義為分數$\frac{m}{n}$，以$a:b=\frac{m}{n}$記之。

然後，畢氏學派判定：可公度性是普遍成立的(universality of commensurability)，亦即任給兩個線段皆為可公度，並以此為他們所要建立的定量幾何基礎論的頭號公設（或公理(axiom)）

【註】：
我們將在§3.4 中證明不可公度的一對線段(偶)是存在的，上述謬誤的公設乃是希臘幾何學的重大挫折，此乃後話。而當年幾何基礎（初）論所達成者，其實是在可公度的假設之下，對於當年所知、常用的定量幾何基本公式，如矩形面積公式，畢氏定理和相似三角形的邊長比例式等逐一給以嚴格論證，如今回顧反思，初論的成就，並非徒勞無功，因為在可公度的特殊情形的證明其實乃是將來對於一般不可公度情形的論證的必經之途。（參看§3.6，§3.7）。

§3.2 平行分割與矩形面積公式

從理論上來回顧中國古算的定量平面幾何，善用矩形面積公式，簡潔明瞭地論証勾股弦公式和相似三角形比例式，精闢獨到。但是矩形面積公式只用不証，則是其唯一的欠缺。由此可見，只要能夠將矩形面積公式妥加論証，則其餘重要的定量幾何定理，其實都是它的簡明之推論（善用面積公式之啓示）。

初論中，對於矩形面積公式的証明，簡述如下：

矩形面積公式：以$\square(\ell,w)$和$\square(u,u)$表示長寬為ℓ,w矩形和單位長為邊長之正方形。用$A(\cdot)$表示面積，則有

$$A(\square(\ell,w)):A(\square(u,u))=(\ell:u)\cdot(w:u)$$

初論之証明：（亦即在可公度之假設下之証明）基於可公度性的假設，存在c,c′使得

$$\ell=m\cdot c,\ \ u=n\cdot c,\ \ w=p\cdot c',\ \ u=q\cdot c'$$

$$\text{亦即 } \ell:u=\frac{m}{n},\ \ w:u=\frac{p}{q}$$

易見$\square(\ell,w)$與$\square(u,u)$可以用平行分割各別割為 mp 個$\square(c,c')$和 nq 個$\square(c,c')$
所以

$$A(\square(\ell,w))=mp\,A(\square(c,c'))$$
$$A(\square(u,u))=nq\,A(\square(c,c'))$$

即有

$$A(\square(\ell,w)):A(\square(u,u))=\frac{mp}{nq}=(\ell:u)\cdot(w:u).$$

§3.3 畢氏定理和相似三角形定理之希臘證法

在幾何原理中，畢氏定理的證明如下圖所示：

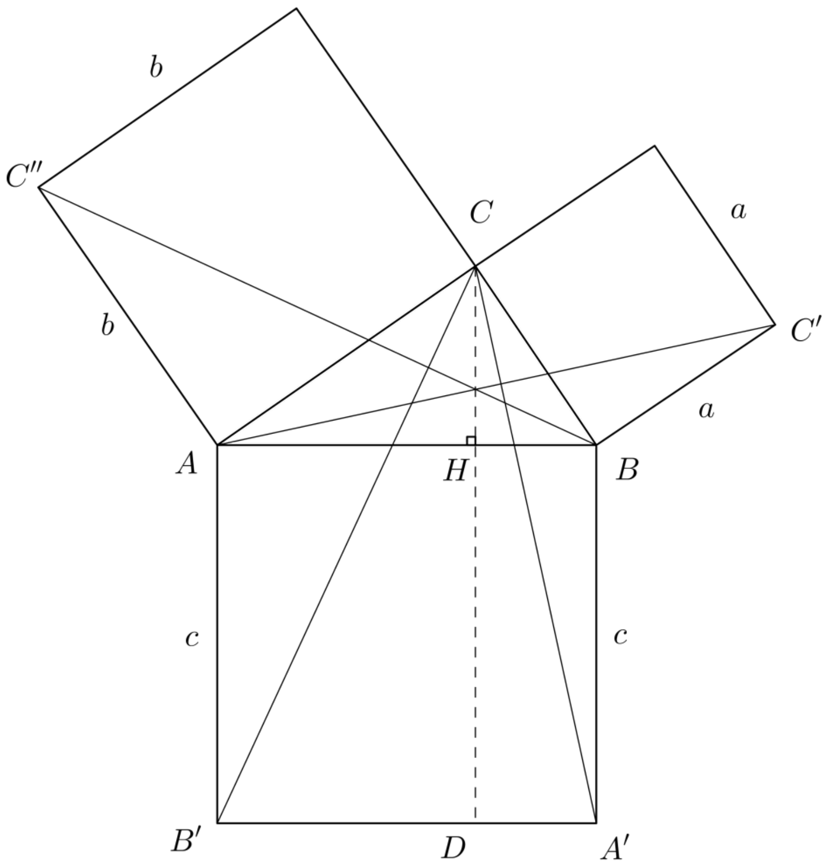


圖 3.1

論證的要點在於將斜邊的垂線$\overline{CH}$延長到其上之正方形的對邊D，它把面積為c^2的正方形分割兩個矩形，然後用面積公式證明各別和a^2-正方形及b^2-正方形等面積。

由圖 3.1 易見

$$\Delta ABC' \cong \Delta A'BC \quad \text{(SAS)}$$
$$\Delta CAB' \cong \Delta C''AB \quad \text{(SAS)}$$

而它們的面積分別等於$\frac{1}{2}a^2$和$\frac{1}{2}b^2$，但是改用c為它們的底邊邊長，則分別等於$\frac{1}{2}c\cdot\overline{HB}$和$\frac{1}{2}c\cdot\overline{AH}$，所以

$$a^2=c\cdot\overline{HB}\text{，}b^2=c\cdot\overline{AH}\text{，}a^2+b^2=c\cdot\left(\overline{HB}+\overline{AH}\right)=c^2.$$

＊<u>初論對於相似三角形定理的證明</u>：

1) 要點在於證明：

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$（三角對應相等）而且$\overline{AB} = n\ \overline{A'B'}$時可以用平行分割把$\Delta ABC$割成$n^2$－個和$\Delta A'B'C'$全等的小三角形，($n=2$的情形就是第二章§2 的例 2 之直接推論)。當年對於n用歸納法證之如下：

如圖 3.2 所示，$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$，$\overline{AB} = (n+1)\overline{A'B'}$，將$\overline{AB}$等分為$(n+1)$－段。令其分點為$B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}, B_n$，過$B_i$點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{AC}$於$C_i$點，易見$\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$，而且由歸納假設即有

$$\overline{\mathrm{A}C_i} = i\ \overline{\mathrm{A}C_1}\ ，\overline{B_iC_i} = i\ \overline{B_1C_1}\ ，i \le n$$

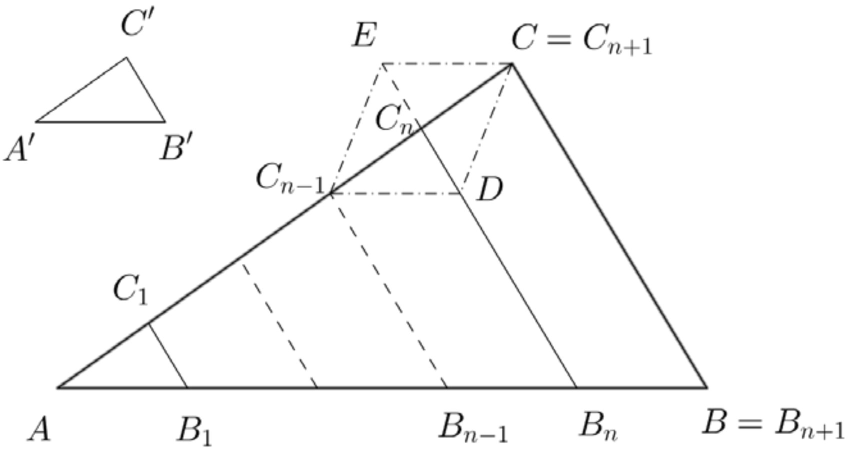


圖 3.2

過C_{n-1}與C點分別作AB之平行線交B_nC_n於D、E兩點，易見：

$$\overline{C_{n-1}D} \overset{//}{=} \overline{B_{n-1}B_n}\ ,\ \overline{EC} \overset{//}{=} \overline{B_nB}$$

$$\Rightarrow\ \overline{C_{n-1}D} \overset{//}{=} \overline{EC}$$

$$\Rightarrow\ \overline{C_{n-1}C_n} = \overline{C_nC}\ ,\ \overline{DC_n} = \overline{C_nE}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} \overline{BC} = \overline{B_nE} = n \cdot \overline{B_1C_1} + \overline{B_1C_1} = (n+1)\overline{B_1C_1} = (n+1)\overline{B'C'} \\ \overline{AC} = \overline{AC_n} + \overline{C_nC} = n \cdot \overline{AC_1} + \overline{AC_1} = (n+1)\overline{A'C'} \end{cases}$$

2) 設有ΔABC ∽ ΔA′B′C′，而且$\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$ = $\frac{m}{n}$亦即存在$\overline{A_1B_1}$使得$\overline{AB} = m\overline{A_1B_1}$，

$\overline{A'B'} = n\ \overline{A_1B_1}$，作另一$\Delta A_1B_1C_1$，其三角對應相等於$\Delta ABC$和$\Delta A'B'C'$者，由 1)之所證，即有

$$\overline{AC} = m\ \overline{A_1C_1}\ ，\ \overline{BC} = m\ \overline{B_1C_1}$$

$$\overline{A'C'} = n\ \overline{A_1C_1}\ ，\ \overline{B'C'} = n\ \overline{B_1C_1}$$

所以就證得

$$\overline{AC} : \overline{A'C'}\ \text{和}\ \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

也都等於$\frac{m}{n}$.

<u>歷史的註記</u>：因為當年誤判任何兩個線段皆為可公度，所以認為上述論證業已證明一般情形的相似三角形定理，相信上述基於可公度性的證明乃是畢氏學派的傑作，並引以自豪。如今回顧反思，此事乃是將來對於一般$\overline{AB}$和$\overline{A'B'}$不可公度之論證必經之途，所以的確值得自豪。

§3.4 不可公度比的發現：石破天驚，Hippasus 的偉大發現

話說當年，畢氏百年之後不久，他的一位年長弟子 Hippasus 還一直在鍥而不捨地探討線段之間的可公度性。例如任給兩個可公度的a、b，其公尺度c之中的最長者可以用下述輾轉丈量法去求取之，即：

設$a<b$：用a去丈量b，若能整量，則a就是$\{a,b\}$的最長公尺度，不然，即得一比a短的餘段r_1。再以r_1去丈量a，若能整量，則r_1就是$\{a,b\}$的最長公尺度，若以(b,a)表示b、a之最長公尺度，即有

$$(b,a)=(a,r_1)$$

不然，又得其餘段r_2。可見如此輾轉丈量，即有

$$(b,a)=(a,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots=(r_{k-1},r_k)=r_k$$

注意：若$a=m\cdot c$，$b=n\cdot c$，則上述輾轉丈量相當於$\{m,n\}$輾轉相除求$\{m,n\}$的最大公因數$d=(m,n)$，而$r_k=d\cdot c$。在古希臘肯定是先有輾轉丈量求最長公尺度的！目下誤稱之謂 Euclid 算法之輾轉相除求最大公因數其實只是它相應的重述。

有一天，Hippasus 又在沙盤上研討正五邊形的幾何。他先用蘆薈幹在沙盤上畫了圖 3.3 實線所示者。

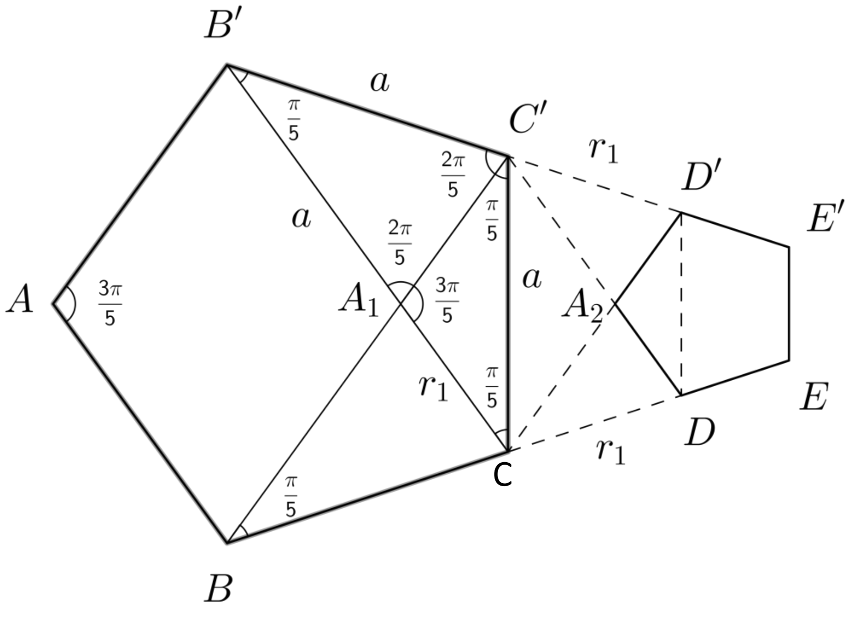


圖 3.3

在昨天他業已用三角形內角和恆為一平角π和等腰三角形定理分析而得的角邊度量逐一標記，即有

$$\Delta CBC' \cong \Delta C'B'C \text{，其底角} = \frac{\pi}{5} \text{之等腰三角形}$$

$$\Delta BCA_1 \cong \Delta B'C'A_1 \text{，其底角} = \frac{2\pi}{5} \text{之等腰三角形}$$

那天他突發異想，把$\overline{BC}$和$\overline{B'C'}$個別延長一段使得

$$\overline{CD} = \overline{C'D'} = \overline{A_1C}\left(= \overline{A_1C'}\right)$$

他一眼就看出五邊形$A_1CDD'C'$乃是一個以r_1為邊長而且以原先的邊長a為其對角線長的正五邊形。此事在一般人看來也許不足為奇，但是卻使得 Hippasus 驚恐萬狀，為甚麼呢？因為它事實勝於雄辯地證明一個正五邊形的邊長a和對角線長b的輾轉丈量是永無止休的,所以他們是不可公度的(noncommensurable)！畢氏學派賴以建立幾何基礎論的頭號公設根本是謬誤之論！此事焉得不讓他驚怖莫名！

接著,他也用同樣的想法證明正方形的邊長和對角線長的輾轉丈量也是永無止休的。

歷史的回顧：Hippasus 的偉大發現是理性文明的輝煌里程碑，畢氏學派理當為此大事慶賀 Hippasus 並且承認前非，致力於基礎論的重建工作，但是當年畢氏學派的弟兄們的反應卻是全然非理性的：先是集體誓言將此事對外保密，當此事為外界得知之後，他們認定 Hippasus 一定是洩密者而要置他於死地。據羅馬時代的幾何史話記載，Hippasus 當時雖然逃跑，但最後還是難免被他的同門兄弟所追殺，理性文明的偉人，難免為真理而犧牲，令人浩嘆！

§3.5 Eudoxus 逼近論與基礎論之重建

不可公度量的發現，實乃幾何巨震(geoquake)，把當年希臘文明的驕傲ー幾何基礎論ー震撼得搖搖欲墜！痛定思痛，當代的幾何學家們都致力於基礎論之重建工作，亦即要把原先只在<u>可公度</u>的特殊情形論證的面積公式、畢氏定理和相似三角形定理，在一般的不可公度的情形加以<u>補證</u>！歷經大約半世紀的艱苦奮鬥，此事終於在 Eudoxus 創逼近論之下完美達成。Eudoxus 的豐功偉業，不但重建了幾何基礎論，也奠定了分析學的基礎，是理性文明第一個光芒萬丈的里程碑，如今回顧其事，相信他乃是在思索<u>如何補證相似三角形定理</u>中有所「<u>頓悟</u>」，從而創逼近論的。

【分析】：

(i) 設有 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 的三角對應相等，若有一對對應邊可公度時，例如 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\frac{m}{n}$，則其餘兩對也不但可公度而且其比值也等於 $\frac{m}{n}$，這就是原本誤認為業已一般之所證。

(ii) 但是在三對皆為不可公度的一般情形，所要論證者乃是三個比值

$$\overline{AB}:\overline{A'B'}\text{，}\overline{AC}:\overline{A'C'}\text{和}\overline{BC}:\overline{B'C'}$$

依然相等。Eudoxus 當年的「頓悟」乃是他認識到兩個不可公度比的大小與相等的實質意義尚有待明確！有此觸機，就促使他逐步探索下列想法：

(iii) 一對不可公度的比值 $a:b$ 當然不等於任何分數，但是它和分數 $\frac{m}{n}$ 之間的大小關係，其義何在？稍加思索他就認識到下述比較原則，即

<u>Eudoxus 比較原則</u>：對於任何不可公度比 $a:b$

$$a:b\begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix}\frac{m}{n} \Leftrightarrow n\cdot a\begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix}m\cdot b$$

(iv) 接著他想到應該還有下述逼近定理：

Eudoxus 逼近定理：對於給定不可公度比 $a:b$，和任意大的整數 n，恆有 m 使得

$$\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n}$$

再者，他當然很明白證明是不可能無中生有的，若要論證上述定理，必須要有某種直觀明顯的假設，也許他是從龜兔賽跑的故事想到下列目下誤稱之謂 Archimedes axiom 者，即對於任給線段l和s，前者不論有多長而後者不論有多短，只要N足夠大，就可以使得$N\cdot s>l$。

用上述公理來證明逼近定理是十分直接的。我們只要令$s=\frac{b}{n}$，$l=a$，$m+1$是第一個使得$Ns>a$的N，亦即有

$$m\cdot\frac{b}{n}<a<(m+1)\cdot\frac{b}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n}$$

至此，Eudoxus 在這方面的認知業已撥雲見日，輕舟已過萬重山，他就順理成章地作出兩個不可公度比$a:b$和$c:d$之間的大、小或相等關係的明確定義：

Endoxus 大小與相等之定義：

$$a:b\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}c:d \Leftrightarrow \exists\ \frac{m}{n}\text{ 使得 } a:b\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}\frac{m}{n}\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}c:d$$

若對於任何$\frac{m}{n}$，它和$a:b$與$c:d$皆有同樣的大小關係，則定義$a:b=c:d$。

接著，它就用上述認知，對於相似三角形定理作如下之補證。

＊相似三角形定理之補證：(Eudoxus)

對於一個任意大的n，即有m

$$\frac{m}{n}<\overline{AB}:\overline{A'B'}<\frac{m+1}{n}$$

我們只要論證

$$\frac{m}{n}<\overline{AC}:\overline{A'C'}<\frac{m+1}{n}$$

$$\frac{m}{n}<\overline{BC}:\overline{B'C'}<\frac{m+1}{n}$$

也跟著成立就足以推論三個比值皆相等。

如圖 3.4 所示，在AB上取$\check{B}$和$\hat{B}$使得

$$\overline{A\breve{B}} = \frac{m}{n}\overline{A'B'},\ \overline{A\hat{B}} = \frac{m+1}{n}\overline{A'B'}$$

過$\breve{B}$與$\hat{B}$點分別作 BC 之平行線，分別交於 AC 於$\breve{C}$與$\hat{C}$，則有

$\Delta A\breve{B}\breve{C} \sim \Delta A\hat{B}\hat{C} \sim \Delta A'B'C'$，再者，由業已證明的可公度比者，即得下述大小關係：

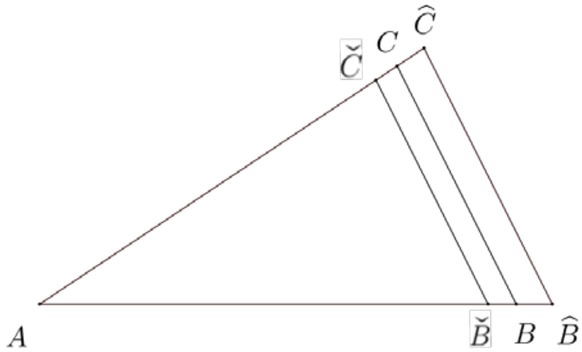


圖 3.4

$$\frac{m}{n}\overline{A'C'} = \overline{A\breve{C}} < \overline{AC} < \overline{A\hat{C}} = \frac{m+1}{n}\overline{A'C'}$$

$$\frac{m}{n}\overline{B'C'} = \overline{\breve{B}\breve{C}} < \overline{BC} < \overline{\hat{B}\hat{C}} = \frac{m+1}{n}\overline{B'C'}$$

亦即所要証的：

$$\frac{m}{n} < \overline{AC} : \overline{A'C'} < \frac{m+1}{n}$$

$$\frac{m}{n} < \overline{BC} : \overline{B'C'} < \frac{m+1}{n}.$$

這就是 Eudoxus 當年對於一般不可公度比的情形相似三角形的補証，簡樸精到，舉重若輕。

＊<u>矩形面積公式之補証</u>：

接著，自然又可以順理成章，用圖 3.5 所示的內外夾逼的想法對於基本的矩形面積公式加以補証，亦即

$$A(\square(\ell, w)) : A(\square(u,u)) = (\ell : u)\cdot(w : u)$$

在$\ell : u$和$w : u$之中至少有一是<u>不可公度</u>的情形的証明，我們不妨設兩者皆為不可

公度。對於一個任意大的 n，即有 m 和 m'使得

$$\frac{m}{n} < \ell : u < \frac{m+1}{n},$$

$$\frac{m'}{n} < w : u < \frac{m'+1}{n}$$

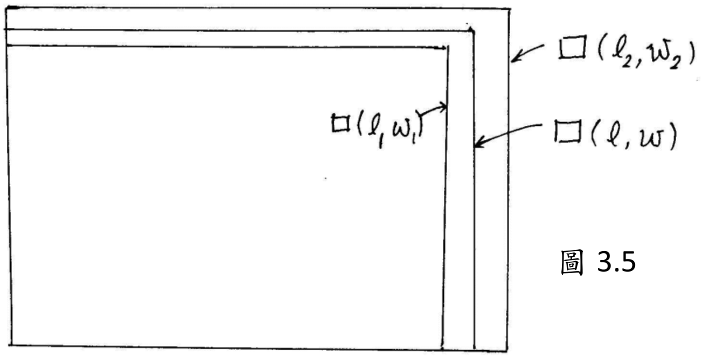


圖 3.5

如圖 3.5 所示，我們可以在$\square(\ell, w)$之內、外各有$\square(\ell_1, w_1)$和$\square(\ell_2, w_2)$使得

$$\ell_1 : u = \frac{m}{n},\ \ \ell_2 : u = \frac{m+1}{n}$$

$$w_1 : u = \frac{m'}{n},\ \ w_2 : u = \frac{m'+1}{n}$$

由此顯然有

$$A(\square(\ell_1, w_1)) < A(\square(\ell, w)) < A(\square(\ell_2, w_2))$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \dfrac{m \cdot m'}{n^2} A(\square(u,u)) & & \dfrac{(m+1)\cdot(m'+1)}{n^2} A(\square(u,u)) \end{array}$$

再者，易見

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{m \cdot m'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} < \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} + 1\right)$$

在 n 無限增大下可以小到任意小，所以同為夾逼於其間的

$$A(\square(\ell, w)) : A(\square(u,u)) \text{ 和 } (\ell : u)\cdot(w : u)$$

必須相等。

<u>注意</u>：上述論證其實也隱含著兩個不可公度比的乘法所應有的定義，這也就是實數乘法的自然定義法。

§3.6 窮盡原理（Principle of exhaustion）和積分雛形之首現：錐體體積公式

有了矩形面積公式的普遍証明，即可用常用的割補法推論三角形的面積公式，亦即½底×高。相信當代業已由實驗看到一個錐體的體積應該等於$\frac{1}{3}$底面積乘以高，但是即便同底等高的兩個錐體體積是否相等也無法由割補加以論証，如今我們知道此事只能用 Eudoxus 的逼近法（亦即積分法）才能証明（Hilbert 第三問題，Dahn's invariant）。

Eudoxus 的錐體體積公式：

$$錐體體積= \frac{1}{3}\ (底\times高)$$

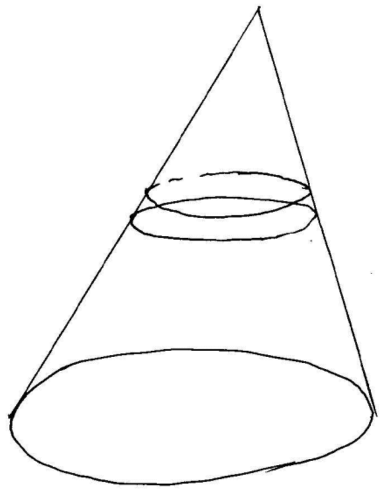


圖 3.6

証明：(積分求和之首例)如圖 3.6 所示，我們將一個底面積為 A 高為 h 的錐體，用平行於底面的平面把它分割成 n 個厚度為$\frac{h}{n}$的薄片，Exdoxus 是研究相似形的大師，當然熟知由上而下的第 i 個截面乃是面積等於$\left(\frac{i}{n}\right)^2 A$的相似形，由此可見，

第 i 個薄片的體積V_i夾逼於$\frac{h}{n}$乘以其上、下底面積之間，即

$$\frac{h}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 A < V_i < \frac{h}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^2 A,\ 1 \le i \le n$$

所以錐體的總體積

$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < V = \sum_{i=1}^{n}V_i < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

至此再用中，希古代皆已得知的平方和公式，即

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$\sum_{i=0}^{n}i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

【註】: 現在無從考據上述求和公式是否在 Eudoxus 當年業已熟知，即使尚且未知，以 Eudoxus 的智慧，他也定可現需現求而得。總之，上述夾逼公式可以簡化為

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

對於任意大的 n 皆成立，而⅓(hA)顯然是唯一夾逼於它們之間的數！如此即能証明

$$V = \frac{1}{3}hA$$

這是理性文明積分求和之首例與突破！

<u>歷史的註記</u>：往後 Archimedes 師承其志，証明球面面積公式，（參看：[2]）

§3.7 回顧與反思

1)平直性與連續性在定量幾何中扮演的角色

概括地來說，空間的本質可以歸結為下述四項，即(i)連結與分隔，(ii)對稱性，(iii)平直性和 (iv)連續性。在第一章所討論的定性平面幾何之啓蒙階段，所用到者僅是連結，分隔與對稱，所討論的是三角形的全等性，幾何不等式和三角形內角和上唯二的選項，即恆等於一個平角或恆小於一個平角（此事在希臘幾何學中未能發現，是一種美中不足，但是它的證明簡樸而且引人入勝，實在應該把它們編入教材來充實中學幾何學之教學）。

及至幾何學的認知要由定性層面邁向定量層面的關鍵時刻，上述三角形的內角和上的兩個選項必然會產生決定性的影響，如今回顧，亦即是平直性與非平直性之間的選擇，前者就是遠較後者簡單易用的歐氏幾何而後者則是一直到十九世紀才發現的非歐幾何（non-Euclidean geometry）它有賴於分析學才能有效研討其定量幾何。因此，後者其實只有在先行研究前者到某種深度之後才有可能研討的幾何學。

例如在後者，根本沒有矩形（或平行四邊形）其實，在非歐幾何中，那種兩對對邊各別等長而且具對角線也等長的四邊形，可以想成矩形的推廣，其兩對對邊之長度可以想成它的長與寬，而且唯一地確定其疊合等價類（congruence class）可是這種廣義的「非歐矩形」的面積不再是$\{\ell, w\}$的雙線性函數而是它們的超越函數（transcendental 亦即 non-algebraic function）

在第二章和第三章的討論中，我們研討了平直性（亦即平行性）在定量平面幾何中扮演的角色，主要的是平行分割，它一來使得矩形的面積公式在可公度的情形可以一蹴而成，二來可以把全等在可公度的情形推進到相似三角形定理，但是這兩個在平直性之下才有的歐氏定量的基本定理的証明卻有賴於 Exdoxus 之逼近理論才能推廣到不可公度的情形，如今回顧反思，Hippasus 的發現，促使理性文明認識到空間的連續本質，有如發現了連續世界這個理念上的新大陸，而 Eudoxus 的逼近理論則教導我們如何去理解連續世界，奠定了幾何學和分析學的基礎，捨此別無他途！連續世界有如「無縫天衣」，但是無縫天衣尚須匠心裁！Eudoxus 的逼近論，把以簡御繁，以「已知之簡」進而認知「未知之繁」這種方法論，簡樸精到地提昇到定量數理分析的領域，無往不利，無堅不摧！我等後學，師法大師，高山仰止，豈能不思而時習之！

2)逼近極限與直線連續不斷，一剪就斷的解析描述：

逼近（approximation）和極限（limit）是同一件事的兩面，在當年 Eudoxus 創逼近論重建幾何基礎論時，他用分數上下夾逼一個不可公度的比值 a:b，例如

把他所証的逼近定理中的 n 取成 2^k，即有

$$s_k=\frac{m}{2^k}<a:b<\frac{m+1}{2^k}=s'_k,\quad s'_k-s_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

在 k 逐步增加時$\{s_k\}$和$\{s_k'\}$構成 a:b 的上下夾逼數列（sequence of

approximation），他們和所要逼近的 a:b 之間的差別顯然要小於$\left(\frac{1}{2}\right)^k$，它們逐步

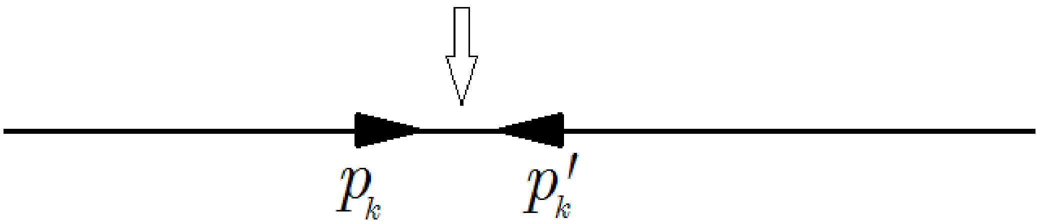
逼近，是 a:b 愈來愈精準的近似值（approximation value）反過來說，我們也可

以把 a:b 叫做$\{s_k\}$與$\{s_k'\}$的共同極限值（limiting value）。其實，上述兩種觀點與

用法是有區別的，例如在相似三角形定理不可公度比情形的論証中，Eudoxus 採用的是逼近觀點，所用之要點則是夾逼於$\{s_k\}$與$\{s_k'\}$之間的那個數的唯一性，而極限值的觀點乃是由一對上下逼近數列$\{s_k\rightarrow\leftarrow s'_k\}$起始，從而求取那個夾逼於其間的數的存在性，亦即是否存在 λ，使得$s_k\le\lambda\le s'_k$對於所有 k 皆成立？

在此，我們不妨設想當年大師 Eudoxus 在論述如何用逼近論重建幾何基礎論的講堂上，有人問及上述存在性是否恒成立？這位幾何學大師會如何回答呢？不論他事先是否業已想過這個存在性問題，相信他都會說：「這的確是一個有意義的好問題。」然後以下述理由肯定其存在性：

直線的幾何直觀是連續不斷的，但是一剪就斷



假如夾逼於其間的點不存在的話，則直線就不是連續不斷的了！由此可見，這種上下夾逼數列$\{s_k\rightarrow\leftarrow s'_k\}$ 的共同極限的存在性其實就是直線的連續不斷，但是一剪就斷的解析描述(analytical formulation)。如今回顧，它乃是往後在幾何學，分析學中各種各樣存在性定理的論証基礎，是數學中最為簡樸基本的存在性，學會如何運用上述解析描述去理解連續世界的好處與精簡乃是理在用中方之妙的體認。

3)中、希定量平面幾何的比較分析：

兩者在定量平面幾何的基本公式上，大體相當，即矩形和三角形的面積公式，勾股弦（畢氏）定理和相似形的比例式，但是在基調和格局上，中國古算的測地術和希臘幾何基礎論是截然不同的，總的來說，中國古代的幾何學家是水利工程

師（西門豹，李冰父子等）和工匠，是唯用是尚的；而古希臘的幾何學家則是把幾何學作為理解宇宙本質的基礎學科，用以研究天文學的基本工具，乃是以量天為其志趣的。

如今回顧反思，若將兩者在對於空間本質理解的深度上相比，的確是相去甚遠，究其原因，並非是在聰明才智上有所差別，而是在志趣與氣概上有其分野，例如可不可公度乃是一個純理論性的問題，它在實用的度量之實踐，力所能及的準確度之下的微量根本沒有任何實用的意義，所以根本不會有此一問，由此可見，在唯用是尚的格局之下，是不會問可不可公度的，當然也不可能有 Hippasus 這種深刻涉及空間連續性的發現和歷經半世紀奮鬥才結晶而得的 Eudoxus 之逼近論。

由此反思，我們應該體會到，真正局限中國古文明當年在幾何學上發展的因素是：「唯用是尚，則難見精深，而所及不遠矣！」而古希臘在幾何學上的成功給全人類的啓示與鼓舞則是：「若以理解大自然的精簡本質為志趣，並能世代相承，精益求精則宇宙的基本原理與結構，其至精至簡至善至美是可望可及的！」

時至今日，我覺得中華文明若要世代永昌，實在需要有一個徹底的文藝復興！認認真真地吸取希臘文明的長處（前車明鑑，西歐文明之昌盛，實乃得益於文藝復興希臘文明！）

第四章、重訪理性文明的奠基：幾何、天文與物理兩千年

理性文明乃是全人類世代相承，對於生存於其中的大自然的本質，精益求精的理性認知的總體與精華。例如我們在§1.2 提及的 Pythagoras 的哲理性的信念：宇宙具有和諧、精簡的本質，而且我們可以經由數、比值與形(numbers, ratios and shapes)的研究（亦即定量研討，由表及裡）去理性認知其本質。從而畢氏學派(Pythagoreans)當年身體力行，初建定量幾何基礎論，實乃理性文明一個啟蒙之基石。至今，畢氏的哲理性之灼見，依然引領著世代相承的理性文明之子，逐步向前。從希臘幾何學到牛頓的《原理》，兩千年來理性文明的演繹，其主軸在於幾何、天文與物理。本章將對於這兩千年來，世代相承理性文明的奠基歷程，概述其精要，長話短說；力求返璞歸真，平實近人；簡樸精到，期能引人入勝。

§4.1 太陽、地球與月亮：測地與量天

我們生活之所在乃是高度透明陽光普照的地球之大氣層，太陽的東昇西落，月亮的圓缺變化是我們日見之常，而且地球上所有生命其實乃是太陽的光與熱的蘊育與恩賜。

太陽、地球與月亮是和人類之生存最為密切相關的三個天體，它們一直在作規則的互動，周而復始，日夜不休；而且常態之中又有日蝕、月蝕等不時展現的「非常態」，著實發人深思，引人入勝。例如三者的大小與距離，理所當然地就是我們認知大自然的一個重要的基本課題。本節將簡述古希臘的兩位先賢 Aristarchus of Samos(310-230 BC)和 Eratosthenes of Cyrene(276-194 BC)在這方面的灼見與論述。

Aristarchus of Samos 大約在 Strato 執教於 Lyceum at Alexandria 時期就業於他在其唯一流傳至今的著作：《論日、月之大小與距離》中對於太陽、地球、月亮三體互動的幾何作出簡樸精到的分析與論述。在 Archimedes 的《The Sand-Reckoner》提及他的「日心論」(heliocentric theory)。但是此論在當代實在難以想像，也沒能在實測天文學上(practical astronomy)有任何進一步的論述和影響，因而被歷史埋沒了一千七百多年，一直到十六世紀初才在哥伯尼的《概要(Commentary)》得以文藝復興（參看§ 4.3 和[3]）

話說當年，Heraclides of Pontus 業已認識到，在天球上的恆星的旋轉其實乃是地球繞軸自轉的「視效應」。再者，月蝕所見的黑影乃是地球在日光之下，投影於月球球面的影子，而日蝕所見者，則是日光被月球阻隔於其間的效果。而且

在日環蝕或日全蝕所見者，可見月亮和太陽所張的視角幾乎相同（約為$\frac{1}{2}$度）。

由當年業已熟知的相似三角形定理即可推論，太陽和月亮的半徑大小之比值基本上等同於地—日距和地—月距之比值。有鑑於月亮的明亮部分乃是日光的反射，所以在月亮恰好是半明半暗的時候，如下面所示，日、地、月三體之間的三角形乃是一個直角三角形。

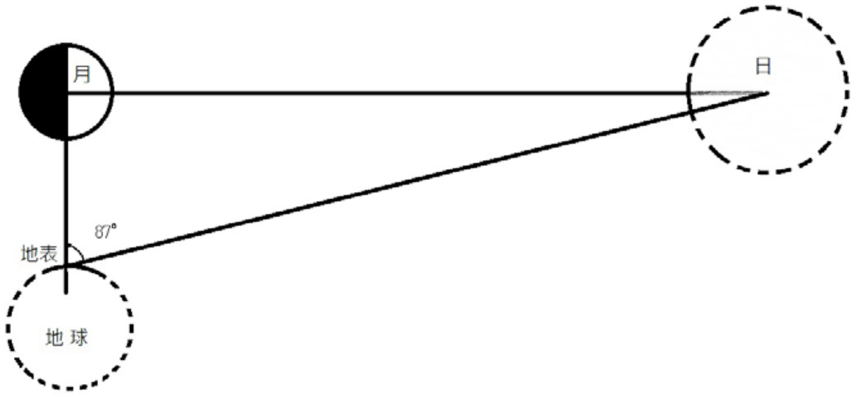


圖 4.1 示意圖（大小距離之比並非切實）

他當年測估之角度是 87°，如今回顧，主要由於日光通過大氣層的折射效應使得觀測角要比幾何連線之角（應該 89°50'）小得不小。總之，他當年以 87° 計算，估計日—地距大約是月—地距的 19 倍(其實乃是 400 倍左右)。再者，月蝕時所見的地球在日光投射的陰影的放大效應很小，由此他估計月球的半徑大約是地球半徑的$\frac{1}{7}$，而太陽的半徑大約是月球的半徑的 19 倍(其實是 400 倍)，而且由月球所張的視角(約為$\frac{1}{2}$度)估計月—地之距大約是地球半徑的 60 倍等等。

如今回顧反思，Aristarchus 遠在紀前三世紀對於日、地、月三體在太空中的互動的幾何分析，思路簡樸精到，令人折服。至於當年他側估的地表夾角 87° 和實際的幾何連線角 89°50'的相當不小之差別，乃是日光通過大氣層的折射效應所致。再者，當年他所能論述者都是比值，而且把實際的大小與距離都歸結到地球半徑的大小。下面就讓我們來介紹其後不久 Eratosthenes 對於地球大小的估計法。

他是當年 Alexandria 的圖書館館長，精通天文地理的博學之士。Alexandria 位於尼羅河河口，而 Syene 則是其正南方尼羅河出山的峽口(亦即是現今阿斯旺

大壩之所在地)。他知道 Syene 有一口很深的大井(至今尚在，參見圖 4.2)，當地人觀察到它在夏至的正午，太陽光直射井底，井壁不見任何陰影(亦即陽光垂直於當地之地面)，但是他在夏至正午去測量 Alexandria 的陽光和直立碑或井壁之間，卻有大約 7°12’的夾角。他以圖一4.2 所示抽象表述上述同時(夏至正午)而異地的兩個地理現象，然後加以如下幾何分析：

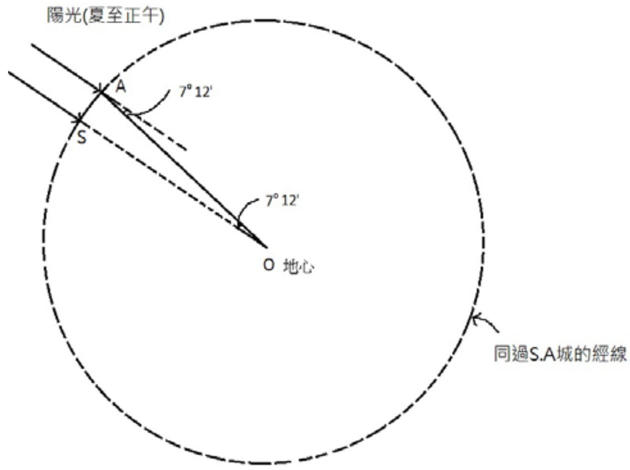


圖 4.2

由 Aristarchus 的論述，「日一地距」要比地球半徑大很多很多倍，所以圖 4.2 所示之夏至正午的陽光幾乎是平行的。再者，他們垂直於 S 城的地面所以其延長線直指地心，而在 A 城則和$\overline{OA}$有 7°12’之夾角。因此圓弧$\widehat{SA}$在圓心理念上所張之角也等於 7°12’(亦即周角的$\frac{1}{50}$)。由此可見地球的大圓周長約為 A 城到 S 城的距離的 50 倍。當年 Eratosthenes 這位老人家並沒有去實地丈量 A、S 之間的距離，而是就近去 A 城市場問由 S 城運貨到 A 城的駱駝商隊打聽他們要走幾天，每天大約走多少希臘里(Stadia)。把所聽到的天數(50)和每天的里程(100 Stadia)的乘積再乘以 50 即得其大圓周長之粗略估計，亦即

2π · 地球半徑約為 250000 希臘里(Stadia)

其實這已經是一個相當好的初步估量。

【註】：在§1.2 中我們簡介抽象化這種認識問題、解決問題的方法，其要點在於擇其精要，妥加組織從而簡樸精到地解決問題，特別是數理分析方面的問題。上述 Eratosthenes 的測地大法就是一個值得思而時學之的好例子。在此，精要有三，即地球是一個大球體，日光是幾乎平行的與夏至正午日光和 A、S 兩地的向心線之間的夾角。而圖 4.2 就是把上述三點妥加組織的幾何表述。它使得那個無法實測的地心角也等於易於實測的 A 地之夾角 7°12’。這樣就簡潔明快地得出地球大小的初估，解決了幾何測量大地的一個重要基本問題，令人讚嘆又折服。

§4.2 行星之謎與古天文學

仰望夜空，繁星點點，自古以來令人好奇，發人深思。例如北斗七星、牛郎織女等等，各具其形（相對位置），但是都同步地繞著北極星自東向西繞行。古時把此事想成在「天球」上安置著點點恆星，而天球則夜夜繞著南北軸運轉不休。及至 Heraclides of Pontus，也已認識到此事其實乃是地球繞南北軸自轉的視效應。但是各古文明的天象愛好者都發現，天際眾星之中，卻還有五顆明亮的「行星」(planets)（在中國稱之為金、木、水、火、土）它們漫遊於黃道十二宮，行蹤奇特各別，其理何在？此事一直是古天文學的核心問題，也是希臘幾何學和天文學家們夢寐以求的量天巨夢，堪稱千古之謎！

如今，地球和其他行星（即金、木、水、火、土和後來發現的天王星、海王星和冥王星）繞日運行，已是眾所週知的常識。但是，此事是一直到四百年前 Kepler 行星定律的偉大發現才真相大白！（參看§4.3）

如今回顧反思，古希臘的理性文明，自 Thales, Pythagoras 一直到 Ptolemy 七百多年在幾何學與天文學上世代相承的探討研究，在幾何學上獲得光芒萬丈的偉大成就（參看第二、三章）但是在天文學上，集其大成的 Ptolemy 之 Almagest（亦即偉大巨著），其本質卻只是一個將錯就錯，但是又言之成理的地心幾何模型(geocentric geometric model for solar system)；居然還能夠在行星運行的天文觀測上，達到相當不錯的可預測性(predictability)。也正因為如此，一直到文藝復興的初期，Almagest 乃是天文學的經典與教本。可以說古天文學在行星之謎的研討上，誤入歧途，竟然經歷了一千多年的迷途不知返！此事著實發人深思，應當詳加檢討並引以為戒。

在此我們將僅作概括的回顧，分析與反思：

（一)在古希臘的理性文明中，幾何學和天文學一直是攜手並進的兩門主導學科，幾何學大師如 Eudoxus, Apollonius 等都致力於為行星運行提供幾何模型，而天文學大家如 Hipparchus, Ptolemy 等則致力於觀測天象，收集數據從而選取、改善「可行」的幾何模型(亦即現在叫做 model fitting)。Almagest 的行星模型乃是世代相承幾百年，在 model-fitting 上集其大成的著作。

（二）在行星運行的理解上，究竟是「日心」還是「地心」乃是最為基本的本質性框架。如今回顧反思，日心乃是真正切實際者；而所有天文觀測則都是基於地心者，所以地心是比較合乎直觀的。可惜當年 Aristarchus 的日心觀點因為和直覺相去甚遠而被置之不理，長期埋沒。總之，古天文學一開始就誤入了地心框架這個全然不切實際的歧途！在科學研究，理性探索大自然的本質中，誤入歧途是在所難免的，但是必須要能夠知返。由上述這一段長達千年的迷途不知返的歷史，

我們可以體認到「知返」的難能可貴和善莫大焉！

（三）在本質上全然不切實際的地心框架上，鍥而不捨地使用各種各樣的幾何模型去和行星的天文觀測（亦即地心觀測的方向數據）湊合(fitting)，其實是一種和"實情的理解"愈行愈遠的徒勞無功。此事我等後學後進應該引以為戒。

（四）古希臘幾何學界一直以研究天文學作為發展幾何學的動機和原由。但是他們的量天巨夢卻一直落空難圓。從幾何分析的觀點來檢討，其根本的原因在於一直沒能夠克服量天問題中的測距離之難點。此事一直到 Kepler 的創見才達到量天有術的境界。（參看§4.3）

§4.3 文藝復興與新天文學

西羅馬帝國滅亡後，歐洲陷於漫長的黑暗時代，一直到文藝復興時代(renaissance)，古希臘的理性文明才浴火重生，先在義大利，然後在西歐各國的大學教學希臘文明(renaissance of Greek civilization)。例如 Euclid's 的 Elements(幾何原本)和 Ptolemy's Almagest 就是當年幾何學和天文學的主要教材。及至文藝復興的後半，溫故而知新，理性文明在天文學上獲得長足的進展，這也就是本節將概述其要的天文學巨棒三接力：Copernicus, Tycho de Brahe 和 Kepler 三位先賢各盡其畢生精力的貢獻：新天文學。

§4.3.1 Copernicus(1473-1543)的貢獻

他在 Krakow 大學時期開始，就醉心於幾何與天文，隨後他轉學到義大利的 Bologna 大學，師從其良師益友 Navara，一起研讀 Almagest，一起作天文觀測。他們對於 Ptolemy 的行星理論的諸多缺陷知之甚詳，而且也都感到其繁複的幾何框架既不自然，又日漸其左支右絀深感天文學有必要改弦更張、另謀出路。但是苦思不得其解，幸好在他困頓難解其惑之中，讀到希臘古籍中對於 Aristarchus 日心觀點，使他有撥雲見日的「頓悟」：日心的基本框架才是自然的出路！

1514 年，他把在日心論上的想法和要點寫成一小本《概要》(Commentariolus)以手抄本的形式流傳於朋友之間，但是天文學是一門不斷有天文觀察在檢驗的學問，他這種概述其要的日心論之想法與論述是既無從驗證也難以令人置信的。哥白尼本人很知道他必須把日心論發展成一個可供檢驗，能夠預測天象的日心體系才能在天文學上立足，才有實用，實在之可信度。這也就是他自 1515 年一直到 1543 年所致力於的《天體運行論》(De revolutionibus orbuim coelestium)；其間

幸有一位青年新秀 Rheticus 的鼎力相助(1539-41)，終於在他垂死時刻才得見運行論的初印本。從 1514 年的《概要》到 1541 年八月完成《天體運行論》的付印稿，哥白尼盡了他畢生的經歷，把粗枝大葉的日心論之想法、觀點與主張，和古往今來的天文學之理論與觀測詳加比較，經由千錘百鍊的幾何分析才寫成日心論的天體運行論，名垂千古，實乃現代科學革命的輝煌首頁和領軍號角。

其實，在《天體運行論》所描述的行星繞日運行和早年《概要》所主張的情形已經有相當的更改。因為原本理想的行星各別繞日作「日心的等速圓周運動」並非「實情」。所以要真正建立一個符合「實情」（亦即經得起天文觀測之檢驗）的行星運行體系，更改是必要的，但是如何更改才合情合理呢？這就是哥白尼盡其畢生之力研討探索的難題。在此限於篇幅，僅作下述幾點簡要的剖析：

（一）在本質上，日心框架遠較 Ptolemy's Almagest 的地心框架合情合理，其第一個優點在於各別行星繞日運行的週期十分明確而且可以通過實測去確定之，例如火、木、土星的軌道位於地球的軌道之外，我們可以經常在薄暮觀測中看到日ー地ー火(或木、土)三連星的時日，一如天際的時鐘問題，用逐次三連星之間的方位差之平均值就可以確定他們十分準確的週期(參看[3])。再者，用日心框架和上述周期來解釋各別行星在薄暮觀察中出現的逆行現象，也十分自然，簡明而且易見其理。

（二）在天文觀察中，地ー星的方位和日ー地的方位之間的夾角是天天可測的數據，但是天際的日ー地，日ー星和地ー星的距離如何計算則一直是量天巨夢中有待克服的主要難點。此事一直到 Kepler 首創其善用週期之量天術(參見§4.3.3)才真正「量天有術」。在哥白尼寫天體運行論時他在這個難點上依然「束手無法」。所以出於無奈，他只好退而求其次，回到他覺得不自然而且不必要的 Ptolemy 的老套，用一大串均輪、本輪的幾何模型來牽強、湊合，只不過在大圓、小圓的個數上少了些。

（三）哥白尼深知天文觀測的基本重要性，所以他在 Frauenbung 的住處，只要有空，盡可能作力所能及的天文數據之補充。總之，即使他當年也已量天有術，也會因為沒有在其後 Tycho de Brahe 所得之天文寶庫，依然無法貫徹，建立他嚮往的日心論所應有的體系。

§4.3.2 Tycho de Brahe(1546-1601)的天文人生與天文寶庫：

文藝復興的天文學巨棒三接力(astronomy-relay)的第二位大師(Tycho de Brahe)第谷出生於丹麥的一個貴族家庭，畢生獻身於天文觀測。在他還是年少的高中時代，在哥本哈根觀測到日蝕現象，令他讚嘆，認識到天象之可預測性，從此立志研究天文學。開始購置天文儀器和書籍，醉心於斯。其後在轉學到萊比錫大學的年代，他在夜以繼夜的天文觀察中看到"土木沖"（即土星和木星看起來幾乎相重）。但是在他去查閱當年的星表時，其所預測的時日，一個晚了好幾天；另一個晚一個星期多，此事顯示古往今來天文觀測的精度不夠好，亟待補充。於是開始自行設計、構造天文儀器來增加他的天文觀測的準確度。

在 1572 年歐洲的夜空出現 Nova（亦即新星之誕生），在眾說紛紜莫衷一是的氛圍中，他的準確觀測脫穎而出，確認它乃是一個新的恆星，寫了它的處女作《Der Stella》論述其理，此事使得他名滿歐洲，成為丹麥王國的驕傲。國王在他遊學回國後，將整個 Hven 島賜為他的領地，並斥資為他在島上建立天文台(Uranisborg)，讓他能夠廿年如一日，優裕地夜以繼夜，熱衷於力求精準的天象觀測，累積了空前未有的天文寶庫。

他在 Uranisborg 設置了比過去更大，更穩定、校正得更精確的一系列天文儀器，使得對於行星方位的觀測可以確保到 4'的精準度，達到以往的兩倍多，不過比精度更重要的是他廿年如一日所累積的天文數據的系統，整體性和可信度與廣度，把歐洲天文學對於古代(特別是 Hipparchus)之天文數據的依賴中解放了出來，為他的後繼的天文巨棒，Kepler 的新天文學，提供了實測之基礎。

§4.3.3 Kepler(1571-1630)，新天文學(Astronomia Nova)

開創新天文學的主角開普勒出生於當時南德新教區域威爾的一個貧窮家庭，幸賴當地的統治者重視教育，獎勵學術，開普勒才能憑藉著他優秀的成績，靠獎學金逐步念到大學，就讀於新教的學術中心杜賓根大學，甚得該校天文學教授梅斯特林(M. Maestlin, 1550-1631)的賞識。而他則是一個哥白尼日心論的鼓吹者。當年在天文學上，日心論和根深蒂固的托勒密地心論是學術界爭論不休的熱門議題。開普勒就曾經以日心論者參加這種辯論會，但是他當時主修的是往後作新教的傳教士的學位(也拿著攻讀這種學位的獎學金)。也許是"天意"或許是命運的安排，1594-95 的兩件偶發事件使得開普勒踏上畢生致力於天文學的征程，數十年如一日，鍥而不捨，百折不餒的探索太陽系的千古之謎。

其一是 1594 年，新教區域的格拉茲的一所高中的數學老師突然病故，迫切

地向當時新教的學術中心杜賓根大學的教授團求助,希望為該校推薦一位能勝任的替補者,大家一致認為青年才俊開普勒是適當人選。因此當年原本想以傳教士為職志的開普勒就改行到格拉茲去做數學教師，而在當時，他還得兼教天文課程。

其二是在 1595 年 7 月 19 日的天文課課堂上，突發異想，發現一個正三角形的內切圓半徑和外接圓半徑之間的比值,大致等同於當年哥白尼《天體運行論》之中木星和土星的均輪半徑之比,此事使得開普勒大為興奮,進而探討當年的六顆行星(即地球和金、木、水、火、土)之軌圓大小關係之間的規律何在？對於篤信天主又是哥白尼學說的鼓吹者,此事著實耐人尋味。當年年少氣盛的開普勒還認定整個太陽系乃是天主的傑出創造，所以包括行星個數為什麼恰好是六個(當年所知只有六個，後來發現了天王星、海王星和冥王星等)也一定有其"道理"，究竟其理何在？據開普勒自己的日記，經過那些時日的沉思狂想，突然"頓悟"到其中的"秘奧和天意"：為什麼行星的個數不多不少，恰恰是六個呢？那是因為立體幾何中恰恰有五個正多面體：即正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正廿面體（圖 4.3）。

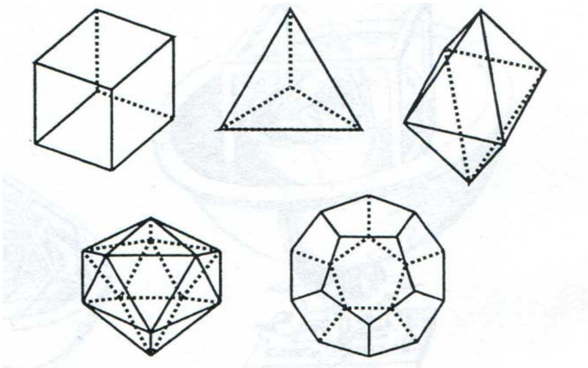
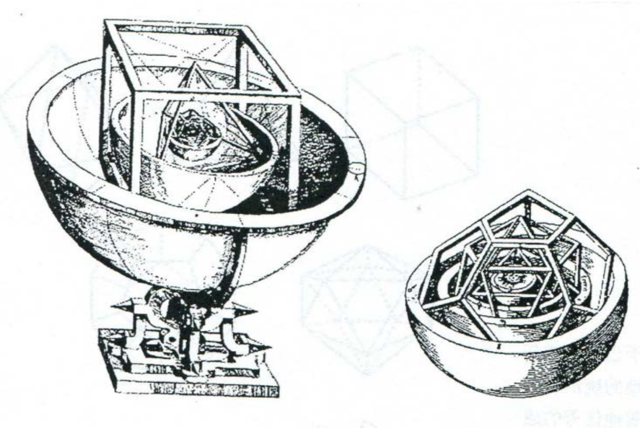


圖 4.3 五個正多面體

而上述立體幾何的"五"和行星個數的"六"又有何關係呢？他說他可以清楚地想到六個行星繞日運行的軌道可以看成是位於六個有些厚度的同心球殼之內者，而在他們之間，恰恰可以妥加安置五個各別的正多面體,每個和其內的球殼外切而和其外者內接。他覺得此事實在太奇妙了！他不但解釋了行星個數恰好是六個，而且也確定了上述同心球殼的大小、厚度！年少的開普勒認定這是天主的"啟示"(revelation)，讓他得窺宇宙的奧秘，問題只是如何妥加的配置五個正多面體於六個軌球薄殼之間(可說是一種幾何的植樹問題)。因此，他狂熱地投身於哥白尼天體運行體系之中，六個行星各別的軌道所"屬於"的球殼之大小、厚度和正多面體的妥為配置，其結果就是開普勒的處女作《宇宙的奧秘》。

下述圖解所展現者，就是他的少年狂想曲的要點，按照他本人的自述，這就是驅策他終其一生,探索太陽系永恆之舞的規律的原動力！也是這位新天文學的

創建者的奇妙啟蒙。



《宇宙奧秘》中六顆行星軌球模型

當年開普勒當然把他的少年狂想曲《宇宙奧秘》寄贈給當代的天文學大師第谷，請他指證。想必第谷也只把他看成少年狂想曲，但是對於這位少年的才氣和衝勁則留有深刻的印象。而開普勒則一直狂熱地要證實他偉大的"猜想"，但是湊來湊去還是不如他所想像那樣完美無缺。他當時的想法是：這種缺失不可能在於他偉大的猜想有問題，而是當代對於行星軌道的大小測算有誤，需要用更加精確的實測數據去重新計算，他當然知道當代精確的天文寶庫乃是第谷所擁有者。總之，第谷和開普勒都逐漸意識到彼此的互補性，攜手合作才能有所進展的迫切需要。由此看來，這兩位一老一少、互補互需的天文學家的合作理當是天作之合，但是他們在 1600 年初到 1601 年 10 月 24 日第谷逝世的共處卻遠非融洽，所以只能說是天作之遇，冥冥之中，似有天意，要他們達成天文巨棒的交接，其中某些細節難明也無關文明之發展，在此略過不談。重要的是。第谷畢生累積的天文寶庫由曠世奇才開普勒傳承，千古之謎真相大白，人類的理性文明得以突飛猛進，唯有天意，才可能有此天作之遇和奇突的巨棒交接。

第谷的突然逝世，開普勒被任命為皇家數學家，繼承第谷的職位和天文寶庫之使用權，從此開普勒運用他超群的幾何分析能力探索第谷寶庫所蘊含的行星運行規律，艱苦卓越，百折不餒，廿年有成：終於由第谷的實測數據總結出其所隱含的實驗性定律：開普勒行星運動三定律。

橢圓律：地球和金、木、水、火、土星繞日運行的軌道各為橢圓形，太陽位居其焦點之一。

面積律：上述六個行星的日一星連線在單位時間中掃過的面積守恆，亦即各有$\frac{1}{2}r^2\omega$=常數。

週期律：上述六個行星之橢圓軌道的長軸之立方和其周期之平方之比值皆相同。

太陽系永恆之舞竟是如此精簡美妙，長達幾千年的困惑，豁然得解，開氏偉大的實驗性定律是理性文明的第二個光芒萬丈的里程碑。

＊<u>發現 Kepler 行星律的艱辛歷程(概述與重訪)</u>：

(一) 三星互動的幾何分析，量天有術：

話說當年(1600 年初)開普勒受聘為第谷的助手的第一個任務乃是從他的天文寶庫中關於火星(Mars)的實測數據去整理出火星的運行軌道。在本質上，所要研究者乃是太陽、地球和火星在天際的三星互動。在當時的天文學界，Mars(戰神)是諸多行星之中，其軌道最為難算難懂者，第谷把他指派給開普勒而把其他一個好算易成的行星軌道交給他的女婿，看起來似乎是內、外有別，但是開普勒當時反而覺得高興而欣然接受，他覺得這乃是器重他的才能，而且還自吹自擂說此事難不倒他，他肯定可以在幾個星期中達成這個任務，他把它比喻成征服戰神(Mars)的戰役，殊不知在這個任務上屢戰屢敗艱苦卓絕的奮鬥了五、六年才克竟其功，這就是發表於 1609 年的新天文學(Astronomia Nova)中所記述的艱辛歷程與輝煌成就，可以說火星乃是開普勒的天文人生中的福星(lucky star)也是他的鍛煉(refining fire)。在此我們將僅以簡述其某些要點，有興趣的讀者，請參看[3]和其他文獻。

＊<u>量天有術(開氏量天術)</u>：

自古以來，量天一直是幾何學家和天文學家們夢寐以求，嚮往的崇高目標。可是此夢一直到開普勒才真正圓夢，他的量天有術的客觀形勢和基本思想何在？首先，天文巨棒三接力的第三棒，繼承了哥白尼的日心論和第谷的天文寶庫，他完全體認前者精髓有二，其一是太陽位居中心，基本上不動，而其二是每個行星繞日運動各有其明確和相當精準的週期，例如火星的週期約為 687.1 天。而他有幸得以繼承第谷的天文寶庫乃是廿多年夜以繼夜力求精準的天文觀測數據，上述兩方面的客觀條件促使開普勒發明下述跨週期疊加量天術：例如在他研究太陽、地球和火星三星互動的幾何分析(geometric analysis)時，在相差一個或幾個火星年 T=687.1 天的時刻 t_1 和 t_2 不但太陽固定不動，而火星也回歸原位！所以ΔSME_1和ΔSME_2乃是跨週期之三星位置，如圖 4.4 所示

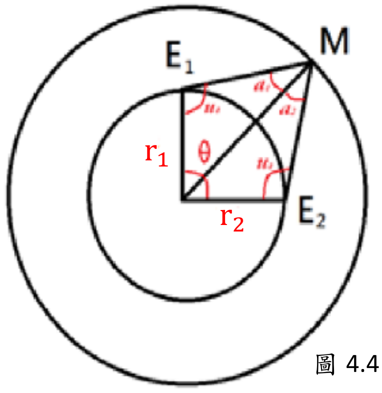


圖 4.4

其中μ_1, μ_2和θ都是實測之角度，可以從第谷的天文寶庫中查到，上述清新簡樸的創意讓他認識到只要能夠掌握日ー地距的規律(亦即地球繞日的極坐標方程$r(\theta)$，就可以用三角測量法去計算$\overrightarrow{SM}$的方位與日ー火距 d，此事讓他認識到下述”卓見”：充分掌握日ー地距$r(\theta)$的規律乃是建立新天文學的不二法門！

簡言之，未能充分理解$r(\theta)$可以說是自知不明，這乃是使得地心觀察行星的”視運動”變得撲朔迷離的根源，但是能夠充分掌握$r(\theta)$則是自知之明，善莫大焉ー量天有術。

＊地球繞日運行的面積律：邁向新天文學的基礎性重大突破

在確定火星繞日運行的週期上，日、地、火三連星的時日扮演了重要的角色，在第谷的天文寶庫中，每次三連星的特殊時刻都有詳盡的數據，在 t_1、t_2 和三連星的 t_0 相差一個或 n 個火星年的情形，圖 4.4 中的θ乃是實測的θ_1與θ_2之和，而且ΔSME_1和ΔSME_2的三內角$\{\theta_1,\ \mu_1,\ \alpha_1 = \pi - \theta_1 - \mu_1\}$和$\{\theta_2,\ \mu_2,\ \alpha_2 = \pi - \theta_2 -$ $\mu 2$ 皆為可測算之角度，由此，用它們的正弦定律，即得

$$\frac{\sin \alpha_i}{r_i} = \frac{\sin \mu_i}{d} (i=1,2)$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \mu_2}{\sin \alpha_2 \sin \mu_1}$$

把上述可以由實測數據逐一實算的比值，對於天文寶庫中和各種三連星的特殊時刻相差幾個火星年的時日逐一計算，詳加比較整理，即可充分掌握 $r(\theta)$的數值變化。總之，開普勒當年花了九牛二虎之力，逐步計算得到 180 個日ー地距，把他們列為第 30 章之大表。其實，有了這個 r 的數據表，開氏量天術也已運用自如。但是他並不以此為滿足，繼續探求這一大堆 $r(\theta_i)$的內在規律何在？從而發現地球的面積律！在此不禁令人有「神來之筆」之感。

對於行星運行的千古之謎，終於真相大白的艱辛歷程之重訪，有興趣的讀者可以參看[3]。

§4.4 數理分析：天上人間合而為一：牛頓萬有引力定律

開普勒的行星運行定律和伽利略的地表重力實驗結果是理性文明在十七世紀上半的重大進展，前者是天上之理而後者則是人間（地表）之理；在本質上兩者皆為實驗性定律（Empirical laws）。在精益求精的數理分析之下，發現兩者的本質在於同一種與距離平方成反比的引力之作用，天上人間合而為一！這就是牛頓萬有引力定律(Newton's law of Universal gravitaty)的來歷。（參見《自然哲學的數學原理》）

本節將對於下述四個關鍵的數理分析提供簡樸初等的證明，即：

【命題 1】：面積律數理等價於作用力向心。
【命題 2】：面積律加上橢圓律⇒平方反比律。
【命題 3】：平方反比律⇒面積律而且其軌道為一個焦點位於中心的錐線。
【命題 4】：兩個球對稱的物體之間引力等於把它們的質量集中於其球心的質點之間之引力（亦即球對稱的引力積分公式；例如地球對於地表質點之引力）

【命題 1】之證明：

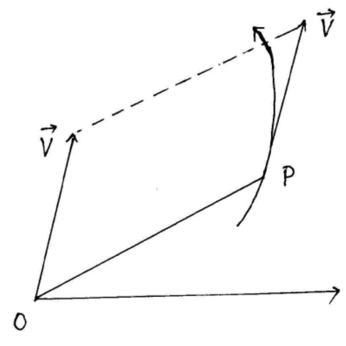
令 $\overrightarrow{OP}$ ，$\vec{V}=\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OP}$ 與 $\vec{a}=\dfrac{d}{dt}\vec{V}$ 分別為位置、速度與加速度向量，$\vec{n}$ 為平面的正向單位法向量，則有

$$(\overrightarrow{OP}\times\vec{V})\cdot\vec{n}=2\frac{dA}{dt}$$

所以

$$\frac{dA}{dt}=\text{常數}\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}\times\vec{V})\cdot n=\vec{V}\times\vec{V}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{OP}\times\vec{a}\cdot\vec{n}$$
$$=\overrightarrow{OP}\times\vec{a}\cdot\vec{n}=0$$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{a}$ 線性相關。



【命題 2】之證明：

如圖 4.5 所示τ_p是橢圓在 P 的切線，d_1、d_2 是焦點 F_1、F_2 到 τ_p 的距離，F_1'、F_2'分別是 F_1、F_2 對於τ_p的反射對稱點，由橢圓的光學性質，易見等腰梯形 $F_1F_2F_2'F_1'$ 的對角線交於 P 點，其長度為 $2a$。令 $\overline{F_2'H}$ 為 $\Delta F_1F_2'F_1'$的一個高，易見 $\overline{F_1H}=d_1+d_2$，$\overline{F_1'H}=d_1-d_2$，所以直角$\Delta F_1F_2'H$和$\Delta F_1'F_2'H$的勾股弦公式如下：

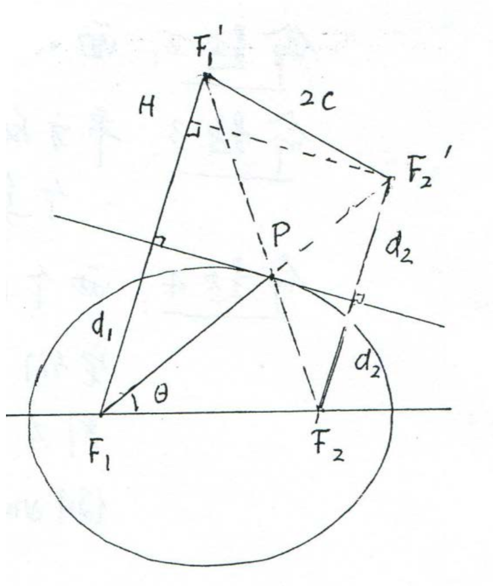


圖 4.5

$$(2a)^2=(d_1+d_2)^2+\overline{F_2'H}^2$$

$$(2c)^2=(d_1-d_2)^2+\overline{F_2'H}^2$$

$$\Rightarrow 4b^2=(2a)^2-(2c)^2=4d_1d_2$$

由此可見，$d_1d_2=b^2$，它乃是橢圓的光學性質的推論又可以說是 $\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=2a$ 的一種對偶形式，把它和面積律結合，即得下述平方反比律的簡潔證明如下：

$$\text{面積律：}\left|\vec{V}\right|\cdot d_1=\frac{2\pi ab}{T}\ ,\ d_1d_2=b^2$$

$$\Rightarrow\left|\vec{V}\right|=\frac{2\pi ab}{Td_1}=\frac{2\pi abd_2}{Tb^2}=\frac{\pi a}{bT}\cdot 2d_2=\frac{\pi a}{bT}\overline{F_2F_2'}$$

再者，易見

$$\overrightarrow{F_2F_2'}=\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_1F_2'}=\begin{pmatrix}-2c\\0\end{pmatrix}+2a\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

而$\vec{V}$和$\frac{\pi a}{bT}\overrightarrow{F_2F_2'}$只差一個$\frac{\pi}{2}$一旋轉，所以

$$\vec{V}=\frac{\pi a}{bT}\begin{pmatrix}0\\-2c\end{pmatrix}+\frac{2\pi a^2}{bT}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{V}=\frac{2\pi a^2}{bT}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}\frac{d\theta}{dt}$$ ，〔面積律：$r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi ab}{T}$〕

$$=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{(2a)^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$$

【命題 3】之證明：

由所設，具有常數K，使得

$$\vec{a}=\frac{-K}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

所以滿足面積律，即有另一常數$k=\frac{dA}{dt}$，亦即$r^2\frac{d\theta}{dt}=2k$

由此可得

$$\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)=\vec{a}(\theta)\frac{dt}{d\theta}=\frac{K}{r^2}\cdot\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\frac{K}{2k}\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

因此，存在常向量$\vec{c}$使得

$$\vec{V}(\theta)=\frac{K}{2k}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}+\vec{c}$$

而且不妨設$\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$，〔亦即設$\vec{V}(0)$和$x$軸垂直〕

再用一次面積律，即得

$$2k=\det(\overrightarrow{OP},\vec{V})=\begin{vmatrix}r\cos\theta & -\frac{K}{2k}\sin\theta\\ r\sin\theta & \frac{K}{2k}\cos\theta+c\end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{K}{(2k)^2}(1+e\cos\theta),\ \ e=\frac{2kc}{K}$$

【命題 4】之證明：(參看[4])

首先，我們可以把他歸結到下述特殊情形，亦即一個均勻密度球面薄殼和其外一點的引力之計算，這是一種球面積分之藝術，要點在善用球面和其外給定點 P 的相對幾何(relative geometry)妥加分割求和

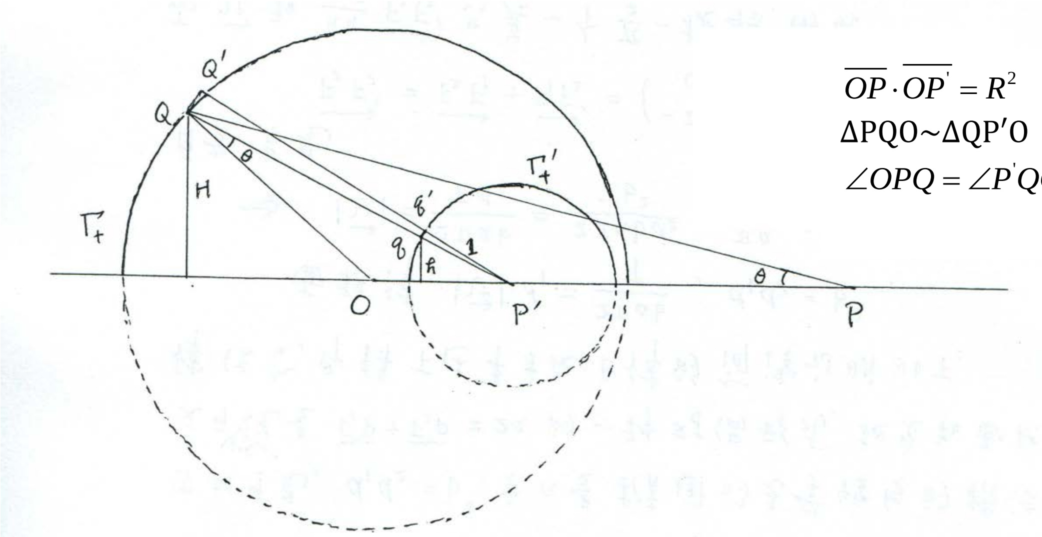


圖 4.6

如圖 4.6 所示，用球一點幾何對於 OP 軸的旋轉對稱性，我們可以把計算壓縮到上述實線所示的上半圓 Γ_+ 令 $\widehat{QQ'}$ 是 Γ_+ 上任取之微弧(an infinitesimal arc) $\widehat{qq'}$ 是 Γ_1' 上的相應微弧，Σ 和 σ 分別是微弧 $\widehat{QQ'}$ 和 $\widehat{qq'}$ 在旋轉之下所成之環帶，易見它們的面積之一階微量如下，即

$$A(\Sigma)=2\pi H\widehat{QQ'} \qquad A(\sigma)=2\pi h\widehat{qq'}$$

$$\widehat{QQ}\cos\theta=\widehat{qq'}\cdot\overline{p'Q} \qquad H=h\cdot\overline{P'Q}$$

由此可見，上述 Σ 對於質點 P 的引力之合力等於

$$G\frac{A(\Sigma)\rho m}{\overline{PQ}^2}\cos\theta=G\rho m\frac{\overline{P'Q}^2A(\sigma)}{\overline{PQ}^2}=G\rho m\frac{R^2}{\overline{OP}^2}A(\sigma)$$

所以其總和等於

$$G\rho m\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\sum A(\sigma)=G\frac{4\pi R^2\rho m}{\overline{OP}^2}=G\frac{Mm}{\overline{OP}^2}$$